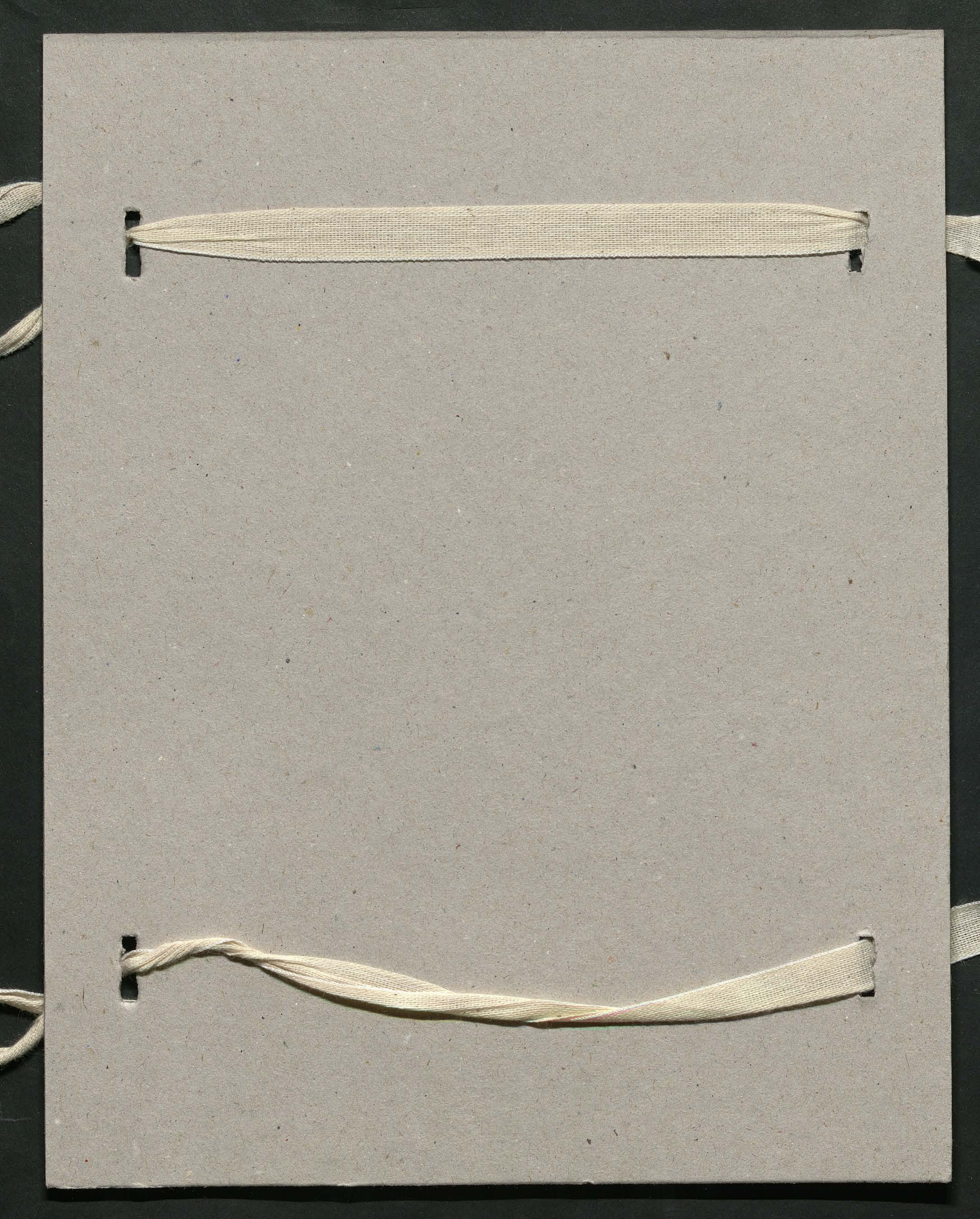




Wykłady docenckie
we Wiedniu

zima 1898/1899

„Vektoren u. Quaternionen"

Przyrównując obydwa te ~~wielkości~~ wyrażenia $\bar{v}$ otrzymujemy

$$m.v_m\left\{\frac{\mu}{m}\frac{w_2'}{v_m}-\left[\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\frac{\mu}{m+\mu}\right]\frac{\mu}{m}\frac{v_0}{v_m}+\frac{1}{4}\frac{\mu}{m+\mu}\right\}=$$

$$=\left[\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\frac{\mu}{m+\mu}\right]R\tau$$

Jeżeli λ jest średnią drogą elektronu ze średnią szybkość $\bar{v}$, między dwoma zderzeniami będzie $\bar{v}=\frac{\lambda}{\tau}$ skąd:

$$\bar{v}=\frac{R.\lambda}{m.v_m}\cdot\frac{1}{\dfrac{\frac{\mu}{m+\mu}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\mu}{m+\mu}}+\dfrac{\frac{\mu}{m}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\mu}{m+\mu}}\cdot\frac{w_2'}{v_m}-\frac{\mu}{m}\frac{v_0}{v_m}}$$

lub oznaczając przez W drugi mnożnik

$$\bar{v}=\frac{R.\lambda}{m.v_m}.W.$$

Co do średniej drogi λ trzeba zrobić następującą uwagę. Z powodu że my przyjęli iż wszystkie cząsteczki są w stanie drgającym, ale ich średnia pozycja jest w środku drgania i możemy przyjąć ~~elektron~~ że średnia droga elektronu jest średnią drogą między nieruchomemi cząsteczkami. ~~Jesteśmy zatem w wypadku~~ Mamy zatem przypadek rozpatrywany przez Clausiusa, jako wyrażenie tej drogi λ będzie służyć nam poprawione wyrażenie średniej drogi dane przez Clausiusa. A zatem:

$$\lambda=\frac{1}{\pi N_0\left(\frac{\sigma+s}{2}\right)^2}$$

gdzie N_0 jest gęstością cząsteczek przewodnika, σ – średnica elektronu a s – średnica cząsteczki.
Gdy mamy do czynienia z elektronami ujemnymi σ jest znikomo małe względem s a zatem

$$\lambda=4\cdot\frac{1}{\pi N_0 s^2}$$

Średnia droga elektronu ujemnego w przewodniku (podczas prądu) jest przeszło niż 4 razy większa od średniej drogi molekuły gazu.
Przyjmiemy że tylko elektrony ujemne biorą udział w prądzie, wówczas μ jest bardzo małe w porównaniu do m, skąd że W

$$W=\left[\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\mu}{m}\right]^{-1}\quad\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{m}{\mu}$$

a zatem

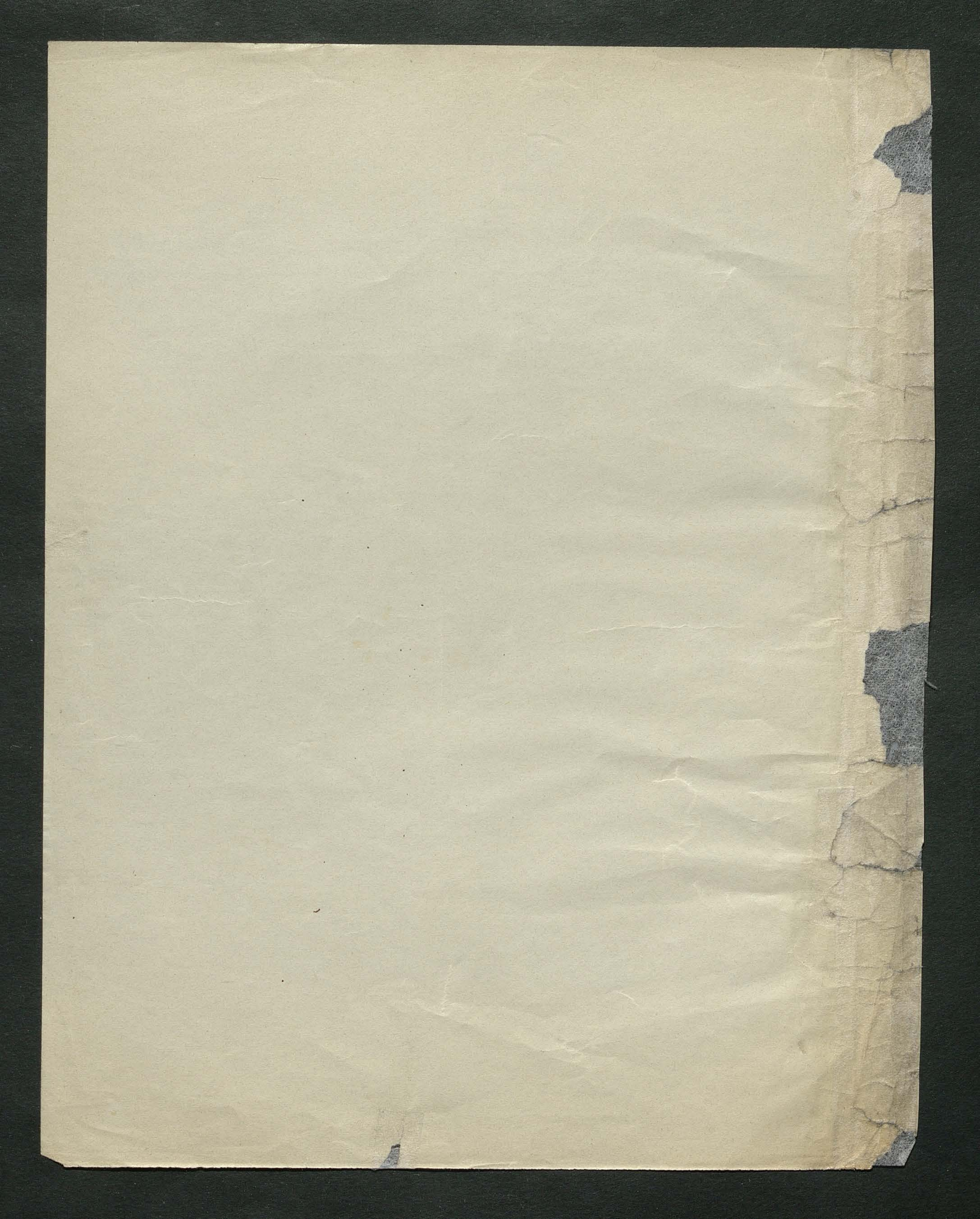
$$\bar{v}=\frac{R.\lambda}{\mu.v_m}\frac{\pi^2}{4}.$$

Vectoren u. Quaternionen-Rechnung

mit Anwendungen auf Physik

Winter Semester 1898/99

(Wien)



Meine Herren!

Ich trete ~~heute~~ diesmal vor Ihnen in der Rolle eines Advocaten auf, nämlich eines Advocaten für die Vectoren- und Quaternionen-Rechnung. Ich will nämlich Propaganda machen für diese mathematische Disciplin, welche noch lange nicht im Unterricht und in der Forschung die ihr gebührende wichtige Stellung eingenommen hat. Es scheint mir dies immer noch nöthig zu sein, obwohl heutzutage diese Lehre sich schon eines gewissen Ansehens erfreut und ihre Nützlichkeit und Bedeutung insbesondere für die Physik wohl von Niemandem, der sich überhaupt damit beschäftigt hat, geleugnet wird. Es bleibt aber meist bei ~~dieser~~ platonischen Anerkennung, selten aber nimmt sich jemand die Mühe sich hineinzuarbeiten und diese Rechnungsart soweit zu lernen, dass er wirklich im Stande ~~wäre~~ ist damit zu operiren, ~~und~~ um dass er ~~d~~ einen wirklichen Profit davon hätte.

Aufrichtig gesagt, kann man dies den Mathematikern und Physikern auch gar nicht so übel nehmen, denn bis in die neueste Zeit fehlte es vollständig an geeigneten Lehrbüchern, welche die Grundlagen dieser neuen Methode in leichtverständlicher Weise darlegten hätte und man musste seine Zuflucht nehmen zu den furchtbar gründlichen dickleibigen Originalwerken, was natürlich nicht jedermanns Sache war. Auch jetzt gibt es noch kein wirklich praktisches Lehrbuch, welches ~~ich Ihnen~~ als z.B. für das vollständige Studium genügend würde ~~empfehlen könnte~~, leichtverständlich wäre und dabei

aber für einzelne Theile dieser Wissenschaft und für specielle Anwendungen gibt es schon einige ganz vortreffliche Bücher. Doch darauf werde ich später noch zurückkommen.

Wenn ich nun ein Philosoph wäre so würde ich eine sehr gelehrte Definition an die Spitze stellen, wie es z.B. Grassmann thut, und sie würden dann wohl ebenso klug sein wie zuvor. Da ich aber Physiker bin, so halte ich es für praktischer eine kurze Darlegung des historischen Entwicklungsganges dieser Lehre zu geben, Ihnen in anderen Worten klar zu machen was man damit eigentlich anfangen will und anfangen kann.

Wie sie wissen pflegt man zwei Arten von Geometrie zu unterscheiden, welche ihrem Wesen nach selbstverständlich gleich, aber der Methode nach ganz verschieden sind, die synthetische Geometrie (Euclid, projective Geometrie etc.) und die analytische G., welche bekanntlich von Descartes erfunden wurde. Die letztere hat sich bisher England für die Physik allein brauchbar erwiesen. Man kann ja mitunter gewisse physikalische Sätze auf recht elegante Weise synthetisch ableiten (z.B. Optik Strahlensysteme, Beweis dass eine Hohlkugel auf einen Punkt des Innern keine Kraft ausübt nur dann wenn 1/r² etc.), aber das sind doch nur vereinzelte Kunststücke, welche sich nicht in allgemein anwendbare Methode zusammenfassen lassen.

~~In der Physik~~ Fast die ganze mathematische Physik ~~wurde~~ ist mittelst Zuhilfenahme der analytischen Geometrie entwickelt worden, und wie wir sehen kann man es damit auch ziemlich weit bringen. Die Methode hat aber unstreitig auch gewisse Nachtheile. ~~Vorallem~~ Sie ist eigentlich doch ein recht plumpes schwer zu gebrauchendes Instrument, verbraucht ~~ungemein~~ überflüssigerweise viel Papier, Tinte und Zeit. Es fällt jedem Anfänger sofort als sehr unpraktisch auf, dass man (dort wo es sich um Richtungsgrößen handelt) jede Beziehung dreimal hinschreiben muss indem man die Gleichung für die Componenten nach den 3 Axen aufstellen muss. Also z.B. in der Mechanik die Gleichgewichtsbedingungen für ein starres System

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma (Yz - Zy) = 0$$
$$\Sigma Y = 0 \qquad \Sigma (Zx - Xz) = 0$$
$$\Sigma Z = 0 \qquad \Sigma (Xy - Yx) = 0$$

Man braucht sich immer blos die erste Gleichung zu merken (Die zweite und dritte Gleichung gewinnt man einfach durch cyklische Permutation

oder z.B. die ~~Hydrody~~ Maxwell'schen Grundgleichungen für die Electricität

$$\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \kappa \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \mp \lambda X$$

$\vdots$ ......

Das ist sehr zeitraubend und erschwert die Übersicht, und überhaupt ist es etwas uns nicht Zusagendes, dass man um einen Gedanken auszudrücken, drei Gleichungen hinschreiben muss. Man könnte nun versuchen, jedesmal an Stelle der drei Gleichungen eine einzige symbolische Gleichung hinzusetzen, welche stillschweigend alle drei repräsentiren soll.

$$\Sigma p = 0 \qquad \Sigma V r p = 0$$

Man würde nun finden, dass man mit diesen Symbolen, welche man eigentlich nur zur Abkürzung eingeführt hat, ebenso gut oder eigentlich noch viel besser und bequemer rechnen kann als ~~mit den~~ indem man die Componenten jedesmal explicite hinschreibt. In dieser Weise ~~kömmt~~ würde man nun ~~die~~ zur Aufstellung ganze Vector Rechnung, ja auch die Quaternionen Rechnung ~~ableiten~~ gelangen, indem man von der Cartesischen analytischen Geometrie ausgeht und überall möglichste Abkürzung der Schreiberei und Übersichtlichkeit anstrebt.

Thatsächlich ist die Quaternionen Form jener Gleichungen: ~~that~~

$$\Sigma p = 0 \qquad \Sigma V p r = 0 \qquad \mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\mathrm{curl}\, e \qquad \mu \frac{\partial e}{\partial t} = \mathrm{curl}\, h - k e$$

~~Dies hat man nicht~~

Dieser Vortheil, dass man die viele Schreiberei erspart und das ganze hübsch übersichtlich beisammen hat, von allem Nebensächlichen befreit, ist garnicht gering anzuschlagen. Man kann freilich sagen: alles was man

p stellt uns hier nicht irgend eine Kraft componente vor, sondern die Kraft selbst in Größe und Richtung. Das Zeichen V ersetzt ~~diese~~ jene complicirte Schreibweise, curl die gewissen Differential-Ausdrücke. Es ist eben das Wesen der Vector Rechnung dass man anstatt der Componenten einer gerichteten Größe diese Größe selbst betrachtet und dass man einfache Symbole einführt für einfache, geometrisch und physikalisch einfach zu interpretirende Operationen, deren Darstellung in ~~der~~ analytischen Geometrie sehr langwierig ist.

mittelst Vector Rechnung ausrechnet könnte man auch mittelst der alten analytischen Geometrie ausrechnen, aber das ist noch kein Gegenbeweis

~~für~~ gegen die Nützlichkeit unseres Verfahrens. Ich erinnere Sie daran, dass
jeder Fortschritt in der Mathematik von solchen Abkürzungen, Schaffungen
von neuen Symbolen und somit auch neuen Begriffen, welche das
complicirtere auf einmal umfassen, ausgegangen ist. Diejenigen unter
Ihnen, welche mit höheren Mathematik vertraut sind, kennen gewiss
die Kugelfunctionen, elliptischen Functionen, Bessel'schen Functionen,
Θ-Function etc. etc. Es sind das alles nur Abkürzungen oder
wenn man will symbolische Bezeichnungen von unendlichen Reihen, oder
anderen complicirten Ausdrücken, mit welchen man sonst schwer umgehen
kann, und die Einführung eines jeden dieser Begriffe hat einen neuen Fort-
schritt in der Mathematik hervorgerufen. Die meisten von Ihnen werden
wissen, was die Determinanten sind

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

Es ist nichts weiter als eine abgekürzte Bezeichnungsweise für eine gewisse
Summe von Producten ~~und [illegible] können~~ welche eine sehr leichte Rechnungsweise gestattet, während
man mit dem explicite hingeschriebenen Ausdruck absolut nicht umgehen
könnte. Wir brauchen übrigens gar nicht so weit zu gehen; ~~[illegible]~~ beispielsweise
ist ja auch unsere ganz gemeine Multiplication ab nichts weiter als ein
Symbol, welches bedeutet: $\underbrace{b + b + b + \ldots}_{a \text{ mal}}$

Wir könnten eigentlich somit fast jede Multiplication in der Mathematik
durch Addition ersetzen und trotzdem brauche ich wohl nicht erst auseinander

6

was für einen Fortschritt eben die Einführung des Begriffs der Multiplication hervorgerufen hat. Ebenso verhält es sich mit unserer Rechnungsart, man könnte sie als einen Ersatz oder, besser gesagt, als eine Verbesserung der Methode der analytischen Geometrie bezeichnen, welche gestattet die Rechnungen mit Raumgrößen viel kürzer und bequemer auszuführen, welche sich der geometrischen und physikalischen Anschauung viel besser anschließt wie jene und welche eine Menge von neuen Begriffen einführt, die namentlich für die physikalische Anschauung von großem Nutzen sind. Sie steht aber nicht im Gegensatz zur analytischen Geometrie, im Gegentheil man kann sofort jede Formel der Vectorrechnung umschreiben in die Form der analytischen Geom. und wenn man es nützlich findet, was allerdings sehr selten vorkommt, kann man mit den drei Componenten separat arbeiten, oder auch wieder die Vectoren als Ganzes betrachten. Das darf man allerdings auch von unserer Rechnung nicht verlangen, dass man Differentialgleichungen damit löst, welche man sonst nicht zu lösen im Stande ist, nur insofern gewährt sie auch hier einen Vortheil als die Diff. Gleichungen meist in einfachen übersichtlichen Form erscheinen und sehr leicht Übersicht etc. gestatten, welche die Lösung erleichtern.

7
5

Was nun die Methoden unseres Calculs anbelangt könnte man zwei (oder in neuester Zeit drei) verschiedene Schulen unterscheiden, die Grassmann'sche und die Hamilton'sche. Es ist sehr merkwürdig, dass zu derselben Zeit ganz unabhängig von einander zwei Männer, Grassmann in Stettin und Hamilton in Dublin auf ganz ähnliche Gedanken gerathen.
Hermann Grassmann veröffentlichte 1844 seine „lineare Ausdehnungslehre" in welcher er die Grundzüge seiner Lehre veröffentlichte, indem er im Allgemeinen die geometrische Seite des Gegenstandes hervorhob und auch auf die Nützlichkeit dieser Methode für die Physik hinwies.
Aber das Buch fand keinen Anklang; es ist in ganz merkwürdiger philosophisch-metaphysischer Weise geschrieben und das schreckte wohl die meisten von einem Studium ab. 1862 erschien eine neue aber ganz umgearbeitete Auflage der Ausdehnungslehre. Diesmal verzichtete Grassmann vollständig auf die geometrische Interpretation seiner Resultate, er behandelte die ganze Sache vom Standpunkte der Algebra.
Dass dies möglich ist, leuchtet ein, wenn man daran denkt, wie man die complexen Zahlen in der Ebene ~~abbilden~~ zur veranschaulichen kann $p = x + iy$ man könnte die ganze analytische Geometrie der Ebene zurückführen auf die Arithmetik complexer Zahlen, welche aus einem reellen und einem imaginären Bestandtheil bestehen. Denkt man sich noch eine dritte ~~Gerade~~ Axe senkrecht darauf so könnte man

auf ihr noch hyperimaginäre Größen aufträge und so die ~~Stück~~ Linien im Raume ~~durch~~ als complexe Größen auffassen, welche aus drei Einheiten bestehen, einer reellen, einer imaginären und einer hyperimaginären, oder da es nicht darauf ankommt was man als reell etc. bezeichnet; welche aus drei Einheiten verschiedener Art bestehen, und so könnte man die räumliche Geometrie auf Arithmetik von dreidimensionalen complexen Zahlen zurückführen, was ja auch theilweise von Hamilton geschieht. Grassmann geht aber noch weiter, er ~~stellt~~ untersucht allgemein die Algebra von complexen Größen, welche aus n ~~dimensionale~~ Einheiten von verschiedener Dimension ~~bestehen~~, stellt also die Sätze für n dimensionale Gebilde auf. ~~Diese Gebilde Untersuchungen~~ Damit ist er ~~in die~~ mit den abstractesten Theilen der Mathematik, der Mannigfaltigkeitslehre einerseits ~~gestellt, welche wieder in Zusammenhang~~ andererseits mit der nicht-euclidischen Geometrie in Zusammenhang gekommen. Wenn wir und die Körper vierdimensionale oder mehrdimensionale Gebilde wären, dann wären z. B. solche, wo man einem das Portemonnaie aus der Tasche nehmen könnte, ohne in die Tasche hineinzugreifen, so würde dies für uns von größter Wichtigkeit sein. Nachdem aber unser Raum glücklicherweise nur dreidimensional ist, so werden wir Physiker uns mit solchen Speculationen, so interessant und erbaulich sie auch für den Mathematiker sein mögen, nicht beschäftigen, ~~weil~~ und uns mit dem Specialfall der drei Dimensionen begnügen. So blieb ~~wurde~~ in Deutschland

8
6

diese neue Disciplin, eben wegen ihres abstracten Gewandes von den Physikern und Geometern ~~und Geom~~ fast unbeachtet und nur von den einigen Mathematikern wie Hankel, Clebsch, Weierstrass, Peano etc wurde sie, – eben von der algebraischen Seite aus – einigermassen cultivirt; obwohl Grassmann selbst in einzelnen Beispielen gezeigt hatte, dass sich diese Methode auch sehr gut für die Physik eignen würde.

Etwas anders war der Lauf der Dinge in England. Dort hatte Sir William Rowan Hamilton, Professor in Dublin noch vor Grassmanns Arbeiten ~~seinen~~ neuen Calcül erfunden, ~~nach dem Grassmann~~ welchen er ~~zugleich~~ vorzugsweise auf geometrischen Grundlage gründete und für die geometrische Forschung benutzte. Die Grundlagen desselben stimmen mit Grassmann's Methode überein und lassen sich in dessen allgemeines System subsumiren, aber die weitere Ausführung ist ganz verschieden. Vor allem erkannte Hamilton, dass der grösste Nutzen dieser Rechnungsart in der Anwendungen auf Geometrie und Physik liege und er brachte die Theorie sowohl wie die geometrischen Anwendungen sofort zu solcher Ausbildung, dass wir auch heute darin nicht wesentlich weiter gekommen sind wie er. Die Resultate Seine Forschungen legte er in zwei dickleibigen Werken nieder: Lectures on Quaternions 1853 und Elements of Quaternions 1866 erst nach seinem Tode herausgegeben, aber von ihm schon fast vollendet, auch übersetzt von Glan 1882

Nach Hamilton's Tode ward Professor Tait in Edinburgh der Quaternionen-Großmeister und ihm sind hauptsächlich einige physikalische Anwendungen zu verdanken, wie die Ausbildung des Operators ∇ etc; seine zahlreichen Untersuchungen sind größtentheils in den Proceedings R S Edinburgh veröffentlicht, außerdem schrieb er ein Lehrbuch unter dem Titel: An Elementary treatise on Q. Elemente der Quaternionen, übersetzt von Scherff (Teubner).

Was aber von Grassmann's Ausdehnungslehre gesagt wurde gilt auch theilweise von Hamiltons Quaternionen. Sie fanden anfangs nicht die Anerkennung bei den Physikern die man hätte erwarten können, obwohl z.B. Maxwell selbst wiederholt auf ihre Nützlichkeit hinwies und sogar einzelne Begriffe in seinem bekannten Lehrbuch der Electricität verwertete. Die Schuld lag wieder einzig und allein an der Darstellungsweise. Hamiltons Originalwerke sind ungemein umfangreich und auch ziemlich kostspielig und Taits Lehrbuch wieder ist ungemein schwer verständlich, so dass man sich nicht wundern konnte, dass die Physiker einen kolossalen Respect vor diesen Quaternionen hatten und dieselben als ganz unheimlich schwer verständliches geheimnissvolles ansahen während sie gerade ohne allzuviel Mühe eine Erleichterung der mathematischen Arbeit zu finden gehofft hatten.

Da ist z.B. ein Buch erschienen unter dem Titel: Utility of Quaternions in Physi-

von Mc. Aulay (bei Macmillan). Wenn aber jemand der von Quaternionen nichts versteht sich daran machen würde, um sich von der Nützlichkeit der Quaternionen zu überzeugen, so wird er arg enttäuscht werden, denn er wird absolut nichts verstehen. Das Buch setzt eben eine gründliche Kenntnis des Calculs bereits voraus und ist dann allerdings von grossem Vortheil, es zeigt wie ungemein einfach sich Hydrodynamik, ~~Electricität~~ usw. in Quaternionenform behandeln lassen.

Es war das Verdienst von Heaviside, dass er die so schwer verständliche Quaternionen-Methode etwas modificirte, indem er zeigte, dass man des complicirten Begriffes der Quaternionen gar nicht bedürfe, um die meisten Resultate der Lehre abzuleiten, und dass es viel praktischer ist, die ganze Disciplin auf den Begriff des Vectors, des Vector und Scalar-Products zu basiren, und erst hinterdrein, wenn man es braucht, den Begriff der Quaternion zu entwickeln. Zugleich hat er die ungemein grosse Fruchtbarkeit dieser ~~Methode~~ welche er Vector-Algebra nennt recht überzeugend dargethan, indem er die Maxwell'sche Electricitäts Theorie ~~das~~ auf diese Weise behandelte. ~~Sein Buch~~ führt den Titel: ~~the~~ Electromagnetic Theory; es ist nicht systematisch geschrieben, sondern eigentlich eine Zusammenfassung einer Serie von Artikeln, welche er in der bekannten Zeitschrift „Electrician" veröffentlichte.

In Deutschland wurde diese Methode hauptsächlich durch das vortreffliche Buch von Föppl ~~Electrom~~ „Die Maxwell'sche Theorie der Electricität" bekannt, welchem noch eine „Geometrie der Wirbelfelder" als Ergänzung nachgefolgt ist.

12 In dem ersten Buche wird der eigentlichen Behandlung der Maxwell'schen Theorie eine Einleitung vorausgeschickt, worin die Grundzüge der Heaviside'schen Methode auseinandergesetzt werden. Die Darstellung ist natürlich nur sehr kurz und einigermaßen einseitig, aber das Buch ist sonst so gut und leichtflüssig geschrieben, dass ich es Ihnen als Einleitung in Ermangelung eines besseren bestens anempfehlen kann. Es ist großentheils das Verdienst von Föppl, dass endlich die Vectoren Rechnung auch unter den deutschen Physikern einen größeren Anklang findet. Man begegnet in ~~allen~~ modernen theoretischen Abhandlungen immer öfter den Ausdrücken vector, scalar, curl, divergenz, tensor etc. man beginnt endlich auch ~~ff~~ in Deutschland einzusehen, von welchem Vortheil diese Rechnungsart für den Physiker ist und es lässt sich erwarten, dass in kurzer Zeit ein großer Theil der ~~Abhandlungen~~ Rechnungen welche jetzt noch ~~in Coord~~ mit Hilfe von Cartesischen Coordinaten ~~dargestellt~~ bewerkstelligt werden, nun in Vectoren Form dargestellt werden.

Ich werde mich ebenfalls im Ganzen mehr an Heaviside's Methode halten als an die Hamilton'sche, dabei aber auch die Resultate Hamilton's herübernehmen, später auch den Begriff der Quaternionen einführen und will trachten auf diese Weise die Vortheile beider Methoden zu vereinigen.

Die Grundlage für die Vectoren-Rechnung ist die Eintheilung der geometrischen und physikalischen Grösse in Vector- und Scalar-Grösse. Letztere sind ~~Quantitäten~~ Grössen welche keine Beziehung zu Richtungen im Raume haben, welche durch eine Angabe der Quantität, das ist einen einzigen Zahlenwert vollkommen bestimmt sind. Solcher Art sind: die absolute Länge einer ~~Linie~~ Strecke, ~~ein~~ Flächeninhalt, Volum, Masse, spezifisches Gewicht, Dichte, Energie, Lebendige Kraft, Potential, Wärmemenge, Temperatur, Zeit etc. Die Vectorgrösse sind dagegen solche, welche noch ausser ihrer absoluten Quantität noch das Charakteristische einer gewissen räumlichen Richtung an sich haben, wie z.B. eine Strecke, ~~ein~~ Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Drehungsmoment, ~~Strömungsgeschwindigkeit~~, Stromstärke, Feldstärke, Magnetisirung, Magnetisches Moment etc.; um ~~die~~ eine directive Grösse zu bestimmen muss ausser ihrer Quantität auch ihre Richtung gegeben sein, was noch zwei ~~weitere~~ Winkel~~zahl~~angaben erfordert (z.B. ~~geogr. Länge u. Breite~~) (z.B. Azimuth u. Höhe), oder aber es können die drei Componenten angegeben werden, in jedem Falle sind aber drei Zahlangaben nötig um einen Vector zu [illegible] definiren und überdies muss noch der Sinn der Richtung gegeben sein z.B. „gerichtet im Sinne wachsender X vom Coordinatensystem xyz gerichtet"*

Vectoren als Scalar degeneriren z.B. hydrost. D., electr. u. therm. Leitfähigkeit; auch umgekehrt.

Während die Scalargrössen keine spezielle Besprechung erfordern, da

sie auch in der Vectoren Rechnung ~~gerade so~~ nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra behandelt werden, gerade wie es sonst zu geschehen pflegt, erfordert die Rechnung mit Vectoren eine Erweiterung und theilweise Abänderung der sonst üblichen Methoden, welche den Haupt-Gegenstand ~~der~~ unserer Betrachtungen bilden wird.

Gleichheit von Vectoren

Zwei Vectoren werden gleich genannt, wenn sowohl ihre Grösse als auch ihre ~~Lage~~ Richtung gleich ist, also wenn sie sich durch eine Parallelverschiebung zur Deckung bringen lassen und gleichen Sinn haben, dagegen kommt es auf die Lage des Anfangs-Punktes gar nicht an. Es ist dies eine willkürliche Definition des Gleichheitszeichens, ~~welches jedoch~~ oder besser gesagt: eine Ausdehnung seiner Bedeutung auf gerichtete Grössen, während man es in der Algebra etc. sonst bloss ~~mit~~ auf ungerichtete Grössen ~~was~~ anzuwenden pflegt; dass sie nützlich ~~ist~~ wird sich im weiteren Verlaufe zeigen. Es ist wohl zu beachten dass die Gleichheit der absoluten Längen zweier Vectoren nicht hinreichend ist, um die Vectoren selbst einander gleich zu setzen. Hiezu ist ~~noch~~ noch Gleichheit der zwei Richtungscoordinaten erforderlich, so dass also ~~das Bestehen~~ ~~einer~~ Vectoren-Gleichung ~~mit~~ die Existenz dreier gewöhnlicher Gleichungen voraussetzt, und ~~umgekehrt~~ ~~auch~~ kann man ~~in dieselben aufgelöst werden kann~~. aus der Existenz einer Vector-Gleichung auf die Existenz dreier Scalar Gleichungen schliessen, da diese damit gleichbedeutend sind.

Analogie: Congruenz & Ähnlichkeit von Dreiecken etc.

~~Aneinanderfügen~~ Bezeichnung von Vectorgrößen

IV Vectoren kann man entweder nach ihrem Anfangs und Endpunkt bezeichnen z.B. AB, was aber nur bei der einfachsten Art von Vectoren d.i. bei Strecken thunlich ist. ~~[illegible]~~ Praktischer ist es im Allgemeinen hiefür ~~einfache~~ Buchstaben zu gebrauchen, wie es mit sonstigen physikalischen etc. Größen zu geschehen pflegt. Hamilton und nach ihm auch Tait so wie überhaupt die meisten Quaternioniker gebrauchten hiefür kleine griechische Buchstaben, während Maxwell und Föppl gothische Fracturbuchstaben einführten. Am zweckmäßigsten scheint es mir doch, mit Heaviside bei den Lateinbuchstaben zu bleiben, welche man dadurch noch in Druckschrift von Scalarengrößen hervorheben kann, dass man sie verdickt, während man in Schreibschrift wo eine Hervorhebung des Vectorcharakters besonders nöthig erscheint, einen Strich darunter anbringen kann. Übrigens werden wir hier nur die Buchstaben a bis n und r verwenden. Die übrigen, sowie die großen Buchstaben und sämmtliche griechischen ~~können~~ verbleiben für die Scalaren.

Aneinanderfügen von Vectorgrößen

Wird an den Vector a=AB in dessen Endpunkte B ein zweiter Vector b=BC angefügt so bezeichnet man die Verbindungslinie AC, ~~somit~~ drei den Vector c mit dem Zeichen a+b.

Dieses Aneinanderfügen von Vectoren, welches man geometrische Addition zu nennen pflegt, involvirt also eine Erweiterung des Begriffes ~~[illegible]~~ des + Zeichens, welche jedoch mit der sonst üblichen Praxis nicht in Widerspruch steht, denn in dem einzigen Falle, in welchem auch sonst Richtgsgrößen vorzukommen pflegen, d. i. bei Addition gleichgerichteter Strecken ~~sind offenbar~~ fällt der Begriff der geometrischen Addition mit der algebraischen Addition zusammen: es wird daraus Summation der Längen mit Beibehalt der Richtung.

Diesen Begriff auch sonst schon mitunter angewendet: In der Ebene: complexe Größe

$$\rho = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$ bedeutet Strecke der x Coord. x = etc.

$$\rho' = x' + iy'$$

$$\rho + \rho' = (x + x') + i(y + y')$$ d. i. Strecke der x Coord. $x + x'$, y -- $y + y'$

Historisches: Moebius?, Bellavitis, Moivre

Darnach ist auch schon klar, was man unter Subtraction von Vectoren verstehen wird. Unter einem negativen Vector versteht man den Vector in umgekehrter Richtung durchlaufen, also unter Subtraction wird man die Addition des umgekehrten Vectors verstehen.

In der Zeichnung genügt nicht der Buchstabe, dabei muss ein Pfeil den Sinn angeben

a   b   a+b   a−b

~~Als~~ Es ist klar was man unter einer Summe ~~zweier Vector~~ aus drei Vectoren:

$d = (a+b)+c$ verstehen wird

Ferner ergibt die bloße Anschauung, dass es gleichgültig

ist ob wir $(a+b)+c$ bilden oder $a+(b+c)$

man kann somit die Klammern überhaupt weglassen $= a+b+c$

(Associatives Gesetz), welches ebenso für Summen von mehr Vectoren gilt.

Ebenso ist klar, dass $a+b = b+a$ = Diagonale des Parallelogramms

was gleichfalls ohne weiteres sich auf Summen

mehrerer Vectoren übertragen lässt. Es sind

also die Summanden vertauschbar (Commutatives Gesetz),

folglich ~~sind dieselben Operationen~~ kann man mit den Zeichen +, ~~aus~~ hier

ebenso umgehen wie sonst in der Algebra, und dasselbe gilt auch

für die Subtraction.

Bei zwei (drei) Vectoren ist die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der

Summanden unmittelbar einzusehen, schwieriger ist es schon,

wenn man ein ganzes Büschel von Vectoren hat, besonders aber

wenn diese nicht in einer Ebene liegen sondern

im Raume verteilt sind. Auch dann ist

$r = a+b+ \dots +f$ unabhängig von der Reihenfolge,

wie wir diese Vectoren ~~zusammen~~ aneinanderfügen.

~~Summen von Kräften~~

Ein sehr passendes Object zur ~~Übung~~ Veranschaulichung solcher Zusammensetzung und überhaupt von Vectoren im Raume bilden z.B. die Kanten der Krystallfiguren. Es wäre eine sehr gute Übung sich da concrete Aufgaben zu stellen z.B. auf wie viel verschiedene Arten kann ich die Diagonale von einer Spitze eines Octaeders zur gegenüberliegenden Spitze als Summe von 3 Vectoren (Kanten) ausdrücken. Beim Tetraeder, Octaeder, Hexaeder werden solche Aufgaben noch leicht im Kopfe zu machen sein, aber beträchtliche Schwierigkeiten wird dies bei den complicirteren Körpern wie Rhombendodekaeder etc. bereiten. Unsere Fähigkeit geometrischer Raumanschauung ~~ist~~ wird eben in den Schulen viel zu wenig geübt (darstellende Geometrie ist noch das beste Mittel dafür, wenn richtig betrieben), da die analytische Geometrie davon ganz abstrahirt, und es ist ein besonderer Nutzen der Vectoren Rechnung dass sie immer wieder zu directer räumlicher Veranschaulichung Anlass gibt

Wird die Summe von irgendwelchen Vectoren $\alpha+\beta+\gamma \ldots = 0$ so heißt das soviel als dass sie ein geschlossenes Polygon bilden, natürlich im allgemeinen kein ebenes sondern räumliches.

~~Ist~~ Bisher haben wir immer räumliche Strecken als Vectoren betrachtet, es ist aber klar dass diese Additions und Subtractionsregeln ganz ebenso für andere z.B. physikalische Vectorgrößen gelten, da man sie ja immer sich durch eine Strecke der Länge und Richtung nach

geometrisch dargestellt denken kann.

Sind die Vectoren z.B. Kräfte so folgt aus dem eben gesagten direct das Kräfteparallelogram: die Resultirende Kraft f verschiedener Komponenten $a\ b\ c$ ist gleich der geometrischen Summe derselben. $f = \Sigma p$

[Ist dies selbstverständlich oder nicht? [illegible]
[illegible]] [illegible]

Ebenso z.B. für Drehungsmomente, dies ist schon schwieriger vorzustellen! Expl.

Ein spezieller Fall der Addition: wenn alle ~~Vectoren~~ Summanden gleich sind.
$$\underbrace{a+a+a+\cdots a}_{x} = ax = xa$$
Also Producte von Vector mit Scalar-Zahlengrößen werden in der gewöhnlichen Weise gebildet; ein ~~X~~ Xfaches eines Vectors = Vector derselben Richtung aber von X facher Länge. Es scheint dies ganz selbstverständlich, muss aber doch hervorgehoben werden, weil (wie wir sehen werden) die Sache nicht mehr so einfach ist sobald anstatt X ein anderer Vector kommt.
Allgemein $b = ax$ bedeutet, dass a und b parallel sind, und dass die Länge von b x mal so groß als a.
Häufig ist es von Nutzen, ~~[illegible]~~ Vectoren als ~~[illegible]~~ derartige Vielfache eines sogenannten Einheitsvectors zu betrachten, d.i. eines Vectors von gleicher Richtung, dessen Länge ~~[illegible]~~ gleich der Längeneinheit (oder überhaupt der Ein) ~~[illegible]~~ ist. Bezeichnen wir z.B. den in der Richtung von a aufgetragenen Einheitsvector mit $\underline{A}$ so kann man setzen $a = A\, a_0$

a_0 ist dann eine bloße Zahl (scalare) = absoluter Wert; sie wird auch Tensor des Vectors a genannt ~~[illegible]~~ und kann auch durch ein vorangesetztes T $Ta = a_0$ bezeichnet werden.

Andererseits wird der Einheitsvector A auch Versor a genannt und mit
U a bezeichnet, diese Ausdrücke werden wir aber erst bei der Einführung der
Quaternionen ~~Ausdrücke~~ häufiger [beschäftigen] benützen

~~Besonders häufig pflegt man ein System von 3 aufeinander ⊥~~
~~Einheitsvectoren zu benutzen~~ [die alle von der Länge 1], ~~welche man i j k nennt.~~

[Denken wir uns nun] Einen ~~jede~~ [d] Vector im Raume; [diesen] kann man ~~wieder~~ [nun] in ~~seine~~ Componenten
nach [den Richtungen von 3 Einheitsvectoren] ~~3 beliebigen Axenrichtungen~~ A, B, C ~~a b c~~ zerlegen, welche nicht in einer
Ebene liegen sollen, wie unmittelbar ersichtlich ist wenn wir durch seinen
Endpunkt ∥ zu denselben ziehen etc. , heissen diese Componenten a, b, c
so haben wir dann $a = xA$, $b = yB$, $c = zC$
andererseits ist $d = a + b + c$, somit kann $d = Ax + By + Cz$ ~~geschrieben werden~~
Am bequemsten ist diese Zerlegung meist, wenn man die A B C ~~so~~
senkrecht zu einander und alle von gleicher Länge = 1 macht; ~~die~~ man
pflegt sie dann mit i, j, k zu bezeichnen, ~~und~~ die ~~dortigen~~ Werte
der Componenten werden wir mit d_1 d_2 d_3 bezeichnen so dass $d = d_1 i + d_2 j + d_3 k$
Diese Zerlegung ~~entspricht~~ für den Fall zweier Coordinaten [identisch mit] ganz der öfters
erwähnten Darstellung complexer Grössen in der Ebene; sie ist [entspricht] analog der
sonst üblichen Cartesischen Darstellung [durch Componenten]; d_1 d_2 d_3 sind einfach die
X Y Z Coordinaten [resp. 1ste Componenten], nur darf man dort die Summenformel nicht $d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$
schreiben, da dort nur gleichartige Grössen addiert werden.

Es ist nun von Wichtigkeit zu bestimmen wie wir die i j k angeordnet
denken

~~denken~~ Man kann die ~~H~~ Z Axe nach rechts oder links, nach oben oder unten zeichnen, darauf kommt es nicht an, es ist dies kein wesentlicher Unterschied denn das ~~kommt~~ hängt blos davon ab von welcher Seite wir die Sache anschauen, aber einen wesentlichen Unterschied zwischen verschiedenen Coordinatensystemen liegt in der Reihenfolge der Axen usw.

Man kann da zweierlei Axensysteme unterscheiden die durch keinerlei Drehung zur Deckung zu bringen sind, sie verhalten sich so wie ein rechter Handschuh zum linken: einer ist das Spiegelbild des andern; das einzige Mittel um die Handschuhe congruent zu machen ist: ~~den~~ den einen umzustülpen, ebenso werden diese System congruent, wenn man eine der Axen in die entgegengesetzte (Minus-) Richtung aufträgt (oder alle drei).

Das System R pflegt man ein rechtshändiges zu nennen, da man von dem Anfangspunkt in der X Richtung fortgehend eine Rechtsdrehung beschreiben muss, um die Y Axe in die Z Axe zu bringen, es ist hauptsächlich in England (Thomson Tait, Tait, Maxwell, Heaviside) in Gebrauch; das linkshändige System L dagegen in Frankreich.

Nun ist aber erst der Begriff der Rechtsdrehung klar zu machen, es ist das dieselbe Drehung welche man beim Eindrehen eines Korkziehers vollführt oder beim Fechten wenn man eine Quart schlägt (aus Terz). Linksdrehung: Korkzieher herausdrehen, Seconde schlagen aus Terz. Korkzieher wie

(in Japan links) ([illegible])

überhaupt ~~die~~ unsere meisten Schrauben sind rechtsgängig. Ebenso Ranken von Wein; Hopfen sind linksgedreht. Rechts u. Links gewundene Schnecken. ([illegible])

Rechts u. Linksdrehung der Polarisationsebene des Lichtes, asymmetrische C Atom Tetraëder. Von besonderer Wichtigkeit z.B. für Magnetismus, rechts gewundene Spule hat den N Pol dort wo Strom austritt? etc.

Würde man die Maxw. Gleichungen ~~für~~ nach dem einen System aufschreiben und dann auf ein anderes übertragen so müsste man ± vertauschen.

Würden wir bloss ~~analyt.~~ Geometrie betreiben so würde diese Unterscheidg. von keiner besondern Wichtigkeit sein, denn die beiden Systeme sind vollkommen gleichberechtigt und ~~man~~ ob man jetzt eine rechtsgewundene Schraube oder eine linksgewundene als positiv ansieht, wäre da ganz gleichgiltig.

Man könnte auch einem Menschen der nicht schon weiss, was rechte u. linke Hand ist, dies durch keinerlei rein geometrische Explication klar machen, man könnte ~~müsste da eine~~ ihn ~~H~~ nur auf eine andere schon bekannte, conventionell festgesetzte Nomenclatur von bekannten Naturerscheinungen verweisen. etc.

Rechts System: X Ost, Y Nord, Z ~~H~~ aufwärts.

Sobald man aber ~~auf~~ die Geometrie auf thatsächlich stattfindende Naturerscheinungen anwendet, also z.B. auf Physik, wird diese Unterscheidung von grosser Wichtigkeit.

Leitet man z.B. die Gleichungen für Electricität und Magnetismus unter Annahme eines rechten Systems ab, so wird man zu falschen Resultaten kommen, wenn man diese Gleichungen auf ein linkes System

anwendet; damit man Richtiges erhält müsste man englisch y und z vertauschen

Für ein rechtes System muss geschrieben werden:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \qquad X =$$

dann wird wirklich der Nordpol einer Magnetnadel nach der Ampère'schen Regel abgelenkt etc.

Von gleicher Wichtigkeit ist ~~dies~~ es auch in der Optik bei der Theorie der Drehung der Polarisations-Ebene, auf diesen Unterschied zu achten. Dort muss man sich vor einem Missverständnis hüten herrscht allerdings eine etwas unzweckmäßige Nomenclatur: rechtsdrehend heissen diejenigen Substanzen, bei denen der Strahl eine linke Schraube beschreibt, darum nämlich weil man in diesen Fällen den im Polarisations-Apparat analysirenden Nicol nach rechts drehen muss um Verdunklg. des Gesichtsfeldes zu erhalten.

Asymmetrisches C Atom

Weinsäure

H, OH, CO_2H, C, C, OH, CO_2H, H

1) rechts

2). links

3). inactiv unzerlegbare Mesoweinsäure

4). zerlegbare Traubensäure

Schon an Krystallform kenntlich (Enantiomorphie)

Ebenso wie beim Quarz

[el. und magn. Kraft, Rotor, Vektor?]

Ebenso wie in der Physik ist auch in der ~~belebten~~ organischen Natur der Unterschied von rechts und links von Wichtigkeit.

Weinranken sind ~~links~~ rechts gängig, Hopfen linksgängig. Manche Schneckenarten rechts andere linksgängig. Asymmetrie bei den Thieren, Herz links, Leber rechts, obwohl gar kein Grund dafür vorliegt. Beweist für gemeinsame Abstammung und Vererbung, sonst wäre es ungemein unwahrscheinlich, dass dies immer so der Fall ist.

Nach diesem Excurs über Rechts und Links kehren wir wieder zu unserem eigentlichen Gegenstand zurück.

Die Zerlegung $d = i\,d_1 + j\,d_2 + k\,d_3$ werden wir sehr häufig anwenden man könnte sie auch unmittelbar als Definition eines Vectors voranschicken, dann ergeben sich die oben ~~auf~~ mittels geometrischer Anschauung bewiesenen Sätze über Addition und Subtraction von selbst.

$$a = i\,a_1 + j\,a_2 + k\,a_3$$
$$b = i\,b_1 + j\,b_2 + k\,b_3$$
$$c =$$

$$a + b + c = i\,(a_1 + b_1 + c_1 + \dots) + j \dots + k\,(\;)$$

bedeutet Vector, dessen x Componente $(a_1 + b_1 \dots)$ Jede in den Klammern beliebig vertauschbar

daher auch Operationsfolge vertauschbar etc.

Mit diesen einfachen Regeln kann man doch schon eine ganze Menge von Aufgaben auf elegante und einfache Weise lösen z.B.

~~Beweis dass die 3 Schwerlinien eines Dreiecks sich in 1 Punkt schneiden, der~~ $\frac{2}{3}$ ~~von der Spitze entfernt ist.~~

Gleichung $r = t a$ wenn t eine beliebige Veränderliche ist bedeutet Gerade in der Richtung a

$r = b + t a$ " " " ~~eben nicht~~ die durch den Endpunkt von b geht.

$r = b + c + \dots + (x + x^2 + \dots + y + z \dots)a$ dasselbe

[dagegen $r = b + x a + x^2 c$ bedeutet schon Curve, allerdings in der Ebene welche a c enthält

$r = b + x a + x^2 c + x^3 d$ Curve im Raume]

Gleichung der Geraden welche durch zwei Punkte b, c geht:

$$r = b + t(c - b) = (1 - t) b + t c$$

Stellt man sich unter t die Zeit vor so bedeutet dies einfach eine gleichförmige Bewegung eines Punktes mit der Geschwindigkeit $(c-b)_0$ in der Richtung $c-b$.

In diesem Falle liegen ~~selbstverständlich~~ also die Endpunkte r, b und c immer in einer ~~Ebene~~ Geraden ~~man wird~~; umgekehrt kann man die Existenz einer solchen Gleichung als Bedingung dafür auffassen, dass die 3 Vectoren r, b, c ~~complanar sind~~ in einer Geraden liegen.

Sollen r, b, c in einer Ebene liegen, so muss sich r ausdrücken lassen durch b und c und umgekehrt jeder Vector der bloss aus additiven Combinationen von b und c gebildet ist liegt mit diesen in einer Ebene z.B. $b+c$, $b-c$, $2b+c$, $2b-3c$ etc.

allgemeine Form eines mit b und c complanaren Vectors r

$$r = x b + y c$$

Es bedeutet somit $r = xb + yc$ auch allgemein eine Ebene die durch den Coordinaten Anfangspunkt geht, und die beiden Vectoren b, c enthält, oder aber überhaupt zu ihnen parallel ist, sie können ja auch windschief sein.

Wählt man eine zu b c parallele Ebene darstellen die durch den Punkt d geht so hat man

$$r = d + x b + y c$$

Eine Ebene welche durch die Endpunkte von a b c geht:

$$r = a + x(b-a) + y(c-a) = a(1-x-y) + bx + cy$$

Wählt man z.B. die Längen als a b c so wird dies:

$r = ri(1-x-y) + rj x + rk y$ 3 Axenabschnitte x y

Man braucht sich diese Formeln nicht zu merken, diese bloß zur Übung und können jeden Moment leicht abgeleitet werden.

Was wird nun eine Gleichung $r = a\varphi(x) + b\psi(x)$ bedeuten wo φ und ψ irgend gegebene Functionen bedeuten?

[Explicite Form]

1). Lineare Form in Bezug auf Vectoren

2). Nur eine willkürliche Veränderliche kommt vor, also Curve

3). Ist sie eben? Ja

4). Kann es eine Gerade sein? dazu müssten φ und ψ bekannt sein; Gerade wenn $\varphi + \psi = 0$ (siehe vorher)

Ebenso überhaupt $r = \sum a\varphi(x) + b\psi(x) + c\chi(x) + \dots$

Curve in der Ebene von 2 Vectoren mit veränderlicher Größe multipliziert, sonst Curve im Raume.

15

Die $a b c$ ... kann man jedes zerlegen nach $i\, j\, k$ z.B.

$$r = i\,[a_1 \varphi(x) + b_1 \psi(x) + c_1 \chi(x) + \cdots]$$
$$+ j\,[a_2 \varphi(x) + b_2 \psi(x) + \cdots]$$
$$+ k\,[a_3 \varphi(x) + \cdots] = \Omega(x)$$

= im Allgemeinen $= i\,\Phi(x) + j\,\Psi(x) + k\,X(x)$

Was bedeutet $r = a\,\varphi(x) + b\,\psi(x) + c\,\chi(y) = \Phi(x, y)$

Das ist jetzt eine Fläche, weil 2 willkürliche Veränderliche, x, y sind.

Wenn wir $r = a\,\varphi(x) + c\,\chi(y) + d\,\psi(z)$ setzen so wird dadurch schon der ganze Raum erfüllt, wenn noch mehr unabhängige Variabeln so ist da im Allgem. keine anschauliche Vorstellung mehr möglich

---

Beispiele $r = x\,i + y\,j + k\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ = Kugel um 0 als Mittelpunkt

$r = m\,x\,i + n\,j\,y + k\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ = Ellipsoid "

z.B. Schnitt mit Ebene ~~$r = a + \ldots b + t c$~~

$$r = A\,i\,(1 - t - z) + B\,j\,t + C\,k\,z$$

$$m\,x = 1 - t - z$$
$$n\,y = B\,t$$
$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = C\,z$$

daraus kann x, y, t als functionen z dargestellt werden also 1 Veränderliche = ~~Curve~~ Schnittcurve

---

~~Beispiele von Curven~~ Auch in anderer Form können die Flächen dargestellt werden z.B. $r = p\,a + q\,b + s\,c$

wenn zwischen ~~die~~ eine Bedingung ~~…~~ $A p^2 + B q^2 + C s^2 = 1$ dies würde eine Centralfläche zweiter Ordnung vorstellen.

Beispiele von Curven:

Ebene Curven: $r = a + bx + cx^2$

~~$= (a_1 + b_1 x + c_1 x^2) i + \dots$~~

$r - a = bx + cx^2$ Parabel

$r = a \sin \beta t + b \cos \beta t$ = Ellipse

$= ax + b\sqrt{1-x^2}$

[crossed out] $r = (i \cos \beta t + j \sin \beta t) A$ = Kreis

$r = A(i \cos x + j \sin x) + kx$ rechte Schraubenlinie

$-kx$ linke "

Voriges Mal schon einige geometrische Örter behandelt, aber nicht zu Ende gebracht.

Also:

I. Eine willkürliche Veränderliche x

$$r = \varphi(x)\, a + \psi(x)\, b + \chi(x)\, c + \vartheta(x)\, d + \ldots \quad \Big\} \text{ Raum Curve } = \Phi(x)$$

Ebenso wenn nur 2 Vectoren ~~vorkommen oder~~ mit veränderl. Grösse multipl. also wenn sie überhaupt in die Form $r = a + b\varphi(x) + c\psi(x)$ gebracht werden kann. Gerade wenn nur 1 Vector veränd. lässt sich aber immer auf 3 Vectoren zurückbringen

II. Zwei ~~willk.~~ unabh. Veränd. x, y

$$r = \varphi(x,y)\, a + \psi(x,y)\, b + \chi(x,y)\, c + \vartheta(x,y)\, d + \ldots \quad \Big\} \text{ Fläche } = \Phi(x,y)$$

Letztes Mal einen speciellen Fall betrachtet, nämlich wo einzelne φ .. bloss Function x, y waren lässt sich immer auf die dreigliedrige Form bringen

Wenn nur 2 Vectoren mit veränderlichen Grössen multiplicirt, so Ebene, und zwar parallel diesen Vectoren.

~~Ausgabe~~

III 3 unabh. Var x, y, z

$$r = \varphi(x,y,z)\, a + \psi(x,y,z)\, b + \ldots \quad \Big\} \text{ ~~Flächensystem, welches~~ keine einfache geometrische}$$

Veranschaulichung, erfüllt ~~den~~ einen ganzen Raumtheil; ~~aber~~ kann auch als Gleichung von Flächensystemen aufgefasst werden

IV). Mehr unabh. Var. gar keine geometr. Veranschaulichung.

Dagegen kann dies doch eine Eben etc vorstellen, wenn zwischen den $x\,y\,z$ noch Bedingungsgleichungen $f(x\,y\,z) = 0$ etc stattfinden, dann sind sie eben nicht unabhängig variabel.

Dies führt zu einer anderen Form von Gleichungen:

$\rho = ax + by + cz$ mit Bedingung $F(x, y, z) = 0$

Fläche; wenn $a = i$, $b = j$, $c = k$ so ist dies einfach die Darstellungsart der analytischen Geometrie

---

$\rho = ax + by + cz$ $\quad F(x\,y\,z) = 0$, $\Phi(x\,y\,z) = 0$ } Raum Curve

Man kann die ~~erste~~ eine Form ~~in~~ die andere umwandeln (wie? später)

Ersten Form: explicite Vectorgleichung } der Fläche, Curve etc
Letztere: Skalargleichung

Dies sind aber noch lange nicht alle möglichen Form, gewöhnlich werden wir sogar mit anderen Formen, nämlich implicieten Vectorgleichungen operieren, welche wir erst später kennen lernen werden

Beispiele:

[Dessen u, v als Variable in Vergleichung mit Cartes. Coord. zu verhalten]

I). 4). $r = A(i \cos x + j \sin x) + B k x$ rechte } Schraubenlinie
$- B k x$ linke

A = Radius des Schraubencylinders (Abstand von Axe)

$2\pi B$ = Ganghöhe

Hier ist k die Axe; wollte ich z.B. i als Axe haben: cyklische Vertauschung

1). $r = A(i \cos x + j \sin x)$ Kreis in ij Ebene

~~Allgemeinst: $r = A$~~ oder auch $r = A(i t + j \sqrt{1-t^2})$

Allgemein $r = A(a \cos x + b \sin x)$ wenn a & b $\perp$ ~~[illegible]~~ und gleich

[lasse u, v als Variable] $\frac{3}{3}$

17

2). $r = \underline{A} i \cos x + B j \sin x$ = Ellipse in ij Ebene

A, B Axen

3). $r = \alpha x + \beta x^2$ Parabel

β = Axenrichtung

II). 1). $\rho = A(i \cos x + j \sin x) + k y$ Kreiscylinder mit k als Axe

2). $\rho = x \left[A k + i \cos y + j \sin y \right]$ Kreis Kegel mit k als Axe

3). $\rho = A \left[i x + j y + k \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right]$ Kugel mit A als Radius

---

Sämmtliche diese Gleichungen lassen sich ohne weiteres in die Scalarform umwandeln, welche sonst in der analytischen Geometrie gebräuchlich ist, indem man $\rho = ix + jy + kz$ setzt und die u, v eliminiert zB.

$ix + jy + kz = A \left[i u + j v + k \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right]$

$x = Au$

$y = Av$

$\underline{z = A \sqrt{1 - u^2 - v^2}}$

$x^2 + y^2 + z^2 = A^2$ Cartesische Kugelgleichung

$ix + jy + kz = A(i \cos u + j \sin u) + B k u$

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cos u \\ y &= A \sin u \\ z &= B u \end{aligned}\right\} \text{ Daraus 2 Gleichungen: } \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= A^2 \\ x &= A \cos \frac{z}{B} \end{aligned}\right\} \text{ Cartesische Schraubenliniengleichung}$$

In letzterem Falle ist es übrigens schon bei unseren jetzigen Kenntnissen leicht eine implicite Gleichung für die Kugel anzugeben welche viel einfacher ist, nämlich:

$r_0 = A$ oder $Tr = A$ dies zeigt das Wesen der impl. Gleichg. dass u, v nicht direkt vorkommt

4/3 III). VII.

Gleichung für den Kugelraum

~~$r = A\,ix + jy + k\sqrt{1-x^2}$~~

beschränkt auf reelle Werte: $u\,v\,w$!

$r = A(iu + jv + k\sqrt{1-u^2-v^2-w^2})$ stellt den ganzen Raum innerhalb der Kugel A vor, (jedem Wert von w entspricht eine Kugelfläche)

Das waren bisher rein geometrische Betrachtungen, solange wir unter r eine Strecke verstanden haben und die willkürlichen Variabeln u, v, w nicht näher definiert haben.

In der Physik wird dies natürlich im Allgemeinen anders sein, dort werden die Vectoren [abhängig] oder die Scalar Variabeln im Allgemeinen bestimmte physikalische Bedeutung haben.

Z.B. Kinematik (und in weiterer Folge auch Mechanik) entsteht dadurch, dass man als eine unabhängige Variable u die Zeit t [oder $t = \varphi(u)$] setzt. Vectoren bleiben Strecken. Mechanik entsteht wenn man außerdem noch Kraftvectoren einführt.

Fasst man dann z.B. Gleichung einer Curve $\rho = a\,\psi(t) + b\,\varphi(t) + c\,\chi(t)$ in Betracht, so ist klar dass dies die Bewegung eines Punktes in dieser Curve darstellt. Selbstverständlich muss auch umgekehrt jede Bewegung eines Punktes als solche Gleichung dargestellt werden können.

Besprechung der obigen Beispiele, zB: $\rho = a + bt$ geradlinig gleichförmig

Gleichung $F(u,t) = 0$ kann im Allgem als Gleichg. einer Curve } aufgefasst
$F(u,v,t) = 0$ — — — — — — — Fläche } werden,
welche sich im Raume [$F(u\,v\,w\,t)$] fortbewegt, allerdings im Allgemeinen auch ihre [Körpers] Gestalt ändert.

In der übrigen Physik ist der Fall am häufigsten dass u v w die Raumcoordinaten vorstellen, während ~~R~~ r irgend einen Vector Elektr. Kraft etc vorstellt. Vectorfelder. Doch das wird später ausführlicher zur Sprache kommen.

Jetzt wollen wir noch die Veränderlichkeit des räumlichen r von den Unabhängigen näher untersuchen.

Spezielles Beispiel

vII. $r =$ ~~$at + bt^2$~~

$au + bu^2$ Parabel, unabhängig davon was u bedeutet

für betrachteten Punkt $r' = au' + bu'^2$

$r' - r = a(u' - u) + b(u'^2 - u^2) = [a + b(u' + u)](u' - u)$ ~~Curve~~

Verbindungsstrecke, Sehne ~~nehmen wir an u als absolute Länge des Bogens~~

~~$r' - r = a(s' - s) + b(s'^2 - s^2)$~~

~~$dr = a\,ds + 2b\,s\,ds$~~

$\frac{dr}{du} = (a + 2bu)\,du$ | bedeutet ~~Einheits~~ Vector in der Richtung der Tangente

Ebenso hat man allgemein, falls

$r = f(u)$ eine Curve ausdrückt

$dr = f'(u)\,du$ also Vectorfunctionen von Skalaren Variabeln kann man ganz so wie sonst differenzieren

du ist ~~ein~~ blos scalarer Factor, der Richtungsvector ist also in $f'(u)$ enthalten

vII. Gleichung der Tangente $s = r + v(a + 2bu)$

$= au + bu^2 + va + 2bvu$

(u constant, v veränderlich)

$= a(u + v) + b(u^2 + 2vu)$

allgemein: $s = r + f'(u) \cdot v$

6/3 Für den Schnittpunkt der Tangente mit b muss ~~Ordinate~~ Factor wegfallen

also: ~~v = -2b~~ ~~[illegible]~~

~~v = -u/2~~ ~~Schnitt s =~~

~~[illegible]~~ $v = -u$

also: $s = -b u^2$ Somit gleich der Abscisse des Berührungs Punktes

Für Schnittpunkt mit a:

$$v = -\frac{u}{2}$$

$$s = a\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\text{ Ordinate}$$

Für $u = 0$ wird $dr = a$ Somit beweist dies dass a die Parabel tangirt.

Leichter ~~[illegible]~~ anschaulich wird dies alles in der kinematischen

Fassung

$$r = at + bt^2$$

$$r' - r = (t - t')\left[a + b(t + t')\right] \quad \frac{r'-r}{t'-t} = \text{mittlere Geschwindigkeit}$$

$$dr = dt\,(a + 2bt)$$

$\frac{dr}{dt}$ = Vector Geschwindigkeit im Momente t $= a + 2bt = \dot{r}$ [Hodograph!]

$\frac{d^2r}{dt^2} = 2b$ = Beschleunigung $= \ddot{r}$ also constant

Stellt freien Fall vor; Punkt im Momente $t = 0$ in Richtung a geworfen

Beschleunigung in Richtung b wirkend.

Ganz allgemein $r = \varphi(t)$

$\dot{r} = \varphi'(t)$

$\ddot{r} = \varphi''(t)$

Mechanik eines freien Punktes

definirt durch

Kraft $f = m\ddot{r}$

In ähnlicher Weise wird es begreiflich wie man Vectordifferentiale integriren kann.

Geschlossenes Polygon $\Sigma a = 0$

$= \Sigma(r_1 - r_2) + \Sigma(r_2 - r_3) + \dots$

Wenn nun unendlich viele einzelne Stücke so bezeichnet man ein jedes einzelne als dr somit $\int dr = 0$ über eine geschlossene Curve

Dabei wohl zu merken, dass dies eine geometrische (Addition) bedeutet (Integration)

$= \int dR\, dr_0$

Wenn man die absoluten Beträge addirt

$\int dr_0 = \text{Umfang} = s$ auch für endliche Stücke

In ähnlicher Weise, wenn ds ein gerichtetes Flächenelement bedeutet

so ist $\int ds = 0$ über ganzen Körper

dagegen $\int ds_0 =$ oberfläche

für endliche Stücke:

$\Sigma s = 0$

$\Sigma s_0 =$ Oberfläche

~~Auf diese Sachen später noch ausführlicher zurückkommen.~~ Hier nur ~~offenbart~~ eingegangen ~~abstrahirt~~ werden mit scharf

Kinetische Gastheorie mittlere Geschwindigkeit

$c = \frac{\Sigma a}{N} = \frac{\int n\, a\, dv}{\int n\, dv}$ $r = \dots = \frac{\int \rho\, a\, dv}{\int \rho\, dv}$

Noch ein mechanisches Beispiel, wo eine Volum Integration vorkommt

Schwerpunkt

$r = a + \frac{m_b}{m_a + m_b}(b - a) = \frac{(m_a + m_b)a + m_b b - m_b a}{\dots}$

$= \frac{a m_a + b m_b}{m_a + m_b}$

Ebenso Schwerpunktsvector für 3 Massen $r = \frac{a m_a + b m_b + c m_c}{m_a + m_b + m_c}$

Für beliebig viele $r = \frac{\Sigma m a}{\Sigma m}$ für unendliche $r = \frac{\int \rho\, a\, dv}{\int \rho\, dv}$

Also sieht man allgemein dass man Vectoren ausdrücke (unmittelbar) auch nach scalaren Variabeln integrieren kann in derselben Weise wie sonst in Integralrechnung; Bedeutung ist die einer geometrischen Summe.

Alles das wird später noch ausführlicher besprochen werden. Jetzt nur als Einübung damit man mit diesen Begriffen vertrauter wird.

Schon durch unsere bisherigen Kenntnisse könnte man manche geometrischen Sätze sehr einfach beweisen.

zB. 3 Schwerlinien des Δ schneiden sich in einem Punkte in $\frac{2}{3}$ des Abstands von Spitze

$$1).\quad r = x\left[a + \tfrac{1}{2}(b-a)\right] = x\,\frac{a+b}{2}$$

$$2).\quad r = \left[b + y\left(\tfrac{a}{2}-b\right)\right] = y\,\frac{a}{2} + (1-y)\,b$$

$$3).\quad r = \left[a + z\left(\tfrac{b}{2}-a\right)\right] = (1-z)\,a + \frac{b}{2}\,z$$

$$1,2)\quad y = x \qquad 1-y = \frac{x}{2}$$

$$1-y = \frac{y}{2} \qquad y = \frac{2}{3}$$

$$1,3)\quad 1-z = \frac{x}{2} \qquad z = x \qquad z = \frac{2}{3}$$

$$1).\quad r = \frac{2}{3}\,\frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{3}$$

$$2).\quad r = \frac{a+b}{3}$$

$$3).\quad r = \frac{a+b}{3}$$

q. e. d

So könnte man sonst auch schon recht hübsche Rechnungen machen, aber im Allgemeinen wäre die Methode noch etwas unbehilflich, hätte keinen großen Vorzug vor Cartes. Geometrie, namentlich ebenso umständlich auszudrücken dass Gerade aufeinander ⊥ stehen wie dort.

Große Vereinfachung wird erst durch zwei neue Symbole erzielt, die wir nun besprechen wollen

Definition

~~$Sab \cos ab$ $Vab = ab$~~

$Sab = a_0 \, b_0 \cos ab$

$Vab = a_0 \, b_0 \sin ab \cdot \varepsilon$ $\varepsilon \perp a, b$

ε hinunter

ε heraus aus Papier

Betrachten wir zuerst Sab näher

Man sieht $Sij = Sik = Sjk = 0$

Dagegen $Sii = Sjj = Skk = 1$ was man auch Si^2 etc. schreiben kann

Ebenso allgemein $Sab = 0$ wenn $a \perp b$

Dies kann man somit gleich als Bedingung aufstellen dass $a \perp b$

Ebenso $Sab = a_0 b_0$ wenn $a \parallel b$

Speziell $Saa = Sa^2 = a_0^2$

Sab ist eine rein scalare Grösse, und man sieht ohne weiteres, dass $Sab = a_0 b_0 SAB$ [illegible] scal. zu multipl. [illegible] multipl.

dass $Sab = Sba$, somit commutatives Gesetz giltig
$Sa \, x \, b = x \, Sab$

ebenso $Sa(b+c) = Sab + Sac$

denn wir können statt a setzen: $a = a_0 A$

$SA(b+c)$ bedeutet die Projection von A auf $b+c$, was aber offenbar gleich ist der Summe der Projectionen von A auf b und auf c

also $SA(b+c) = SAb + SAc$

wenn man dann mit a_0 multipl. folgt $Sa(b+c) = Sab + Sac$

2/4

Ebenso auch $S(a+b)c = S ac + S bc$

und $S(a+b)(c+d) = S ac + S ad + S bc + S bd$

also auch distributives Gesetz gilt; betreffs associativer Gesetz werden wir erst später sehen.

Man nennt diese Operation S: scalare Multiplication
(cos Vector b multipl. [illegible] mit [illegible] Multiplication)

$S ab$ heisst: Scalar Product von a auf b,

von Grassmann genannt: inneres Product

[Heaviside und Föppl pflegen das S wegzulassen, dies halte ich für unpraktisch, weil einseitige Bevorzugung von S gegenüber V, auch wegen Einführung von Quaternionen. Bei Hamilton neg. Zeichen, weil Beziehung zu imag. Grösse]

Führt man die Componenten in das Product ein, so wird

$S(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = S a_0 b_0 \cos\theta$ Invariante in Bezug auf Coordinatensystem

also das Scalar Product ausgedrückt durch die Componenten Producte, natürlich scalar. Dividiert man durch $a_0 b_0$ so folgt ohne weiteres

$\cos(ab) = \cos(ax)\cos(bx) + \cos(ay)\cos(by) + \cos(az)\cos(bz)$

Um die Art wie dieser Operator wirkt näher zu betrachten:

$S ia = a_1 \quad S ja = a_2 \quad S ka = a_3$

Somit kann $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ geschrieben werden

$= i S ia + j S ja + k S ka$ was eine Identität ist

Eine bekannte trigonometrische Formel

Andere einfache Anwendungen.

$$S(a+b)(a+b) = Sa^2 + Sb^2 + 2Sab$$

$= c$

$Sc^2 =$

$c_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos ab$ bekannter trigon. Satz.

$$S(a+b)(a-b) = Sa^2 - Sb^2$$

$$S(a+b)^2 = Sa^2 + Sb^2 + 2Sab$$

$$S(a-b)^2 = Sa^2 + Sb^2 - 2Sab$$

$$S(a+b)^2 + S(a-b)^2 = 2Sa^2 + 2Sb^2$$

Summe der Quadrate der Diagonalen in einem Parallelogr. = Summe der Quadrate über allen vier Seiten.

$$S(a+b)^2 - S(a-b)^2 = 4Sab \quad \text{etc.}$$

~~Allgemeinen Fall (später):~~

~~$r = ma + nb + pc$~~

4/4

In der Physik kommen Scalar-Producte fast überall vor, wo sonst cosinus gebraucht wird.

Greifen z.B. Σf Kräfte in einem Punkte an, so ist die Componente nach der I Axe: $\Sigma S f i = S \Sigma f i$

Arbeit einer Kraft f an einem Punkte der sich um die Strecke a bewegt: $A = S f a$ (z.B. in Meterkilogramm gemessen)

liegt a in der Richtung von f so ist dies $= f_0 a_0$

ist es senkrecht — $= 0$

Die Arbeit sämmtlicher Kräfte $A = \Sigma S f a = S \Sigma f a$

bedeutet a die Geschwindigkeit also Strecke per Zeiteinheit, so ist dies Arbeit per Zeiteinheit also Effect (nach Pferdekräften gemessen).

Ebenso: bedeutet d ein Drehungsmoment in Bezug auf die Axe $\mathfrak{D}$

.... c eine Winkelgeschwindigkeit " " " C

so ist $S dc$ die dadurch geleistete Arbeit pro Zeiteinheit.

Ist e electromotorische Kraft
d dielectrische Verschiebung so ist $S e d$ = electrostatische Energie
im Falle wo $d = ke$ $= K S e^2$

ebenso h magnetische Kraft
g Induction

$S h g = \mu S h^2$ magnetische Energie

etc.

5/4
22

Definition:

$V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_0 b_0 \sin ab \cdot \mathfrak{E}$

$\mathfrak{E}$ = Vector ⊥ $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und zwar so dass ~~$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{E}$~~ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ ein rechtes Axensystem bilden (also in alphabetischer Reihenfolge)

z.B. [Skizze: b, a] $\mathfrak{E}$ herauf [Skizze: a, b] $\mathfrak{E}$ hinunter gerichtet

Am besten macht man sich die Richtungsbeziehung am Axensystem i j k

$V\, i\, j = k \quad V\, j k = i \quad V k i = j$

$V\, j\, i = -k \quad V k j = -i \quad V i k = -j$

[Skizze: i j k, +]

Dagegen $V\, i^2 = V\, j^2 = V\, k^2 = 0$

Allgemein: Vector Product aus ⊥ Vectoren = Vector der darauf ⊥ steht und dessen ~~Maßstab~~ Länge dem Product ihrer Längen gleich ist, Vector Prod. ∥ Vectoren = 0

Einfache geometrische Bedeutung = Vector Flächeninhalt

Rechnungs Regeln:

$V x\mathfrak{a}\, \mathfrak{b} = x\, V \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ etc also auch $V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_0 b_0 V \mathfrak{A}\mathfrak{B}$

mit Scalaren kann multipl. werden, indem man einen Factor multipl., ganz wie sonst.

$V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -V\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ Sehr wichtig; Unterschied gegen Scalare Multipl.

6/4

Dagegen gilt immer noch das distributive Gesetz:

$$V a(b+c) = V ab + V ac$$

Wir nehmen die I Axe in Richtung a

setzen also $a = ~~a_0~~\ a_1 i = a_0 i$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

$$V ab = a_0 V i b = a_0 (+b_3 k - b_2 j)$$

$$V ac = a_0 (c_3 k - c_2 j)$$

$$V a(b+c) = a_0 \left[(c_3 + b_3) k - (c_2 + b_2) j \right]$$

q. e. d.

Ebenso $V(a+b)\,c = V ac + V bc$

und $V(a+b)(c+d) = V ac + V bc + V ad + V bd$ etc.

Also: Vector Product einer Summe = Summe der Vectorproducte; dabei aber immer auf die Reihenfolge achtgeben!

Es gilt also wohl das distrib., aber nicht das commut. Gesetz (betreffs assoc. werden wir später sehen, einstweilen betrachten wir nur Producte von 2 ~~Skalaren~~ Vectoren)

Trotzdem pflegt man auch diese Operation: Multiplication zu nennen, also Vector-Product. Grassmann nennt sie die äussere Multiplic. weil ~~kann~~ von 0 verschieden wenn die Vectoren auseinandergehen, aber = 0 wenn ineinanderfallen.

Vector Product und Scalar Product können also = Null werden, ohne dass einer ihrer Factoren = 0 wird; tiefsinnige metaphysische Betrachtungen

darüber anzustellen ist ganz überflüssig, nachdem es ja ein blosses Übereinkommen ist, dass man diese Operation eben Multiplication nennt. Dieses wäre vielleicht: Complication, um Missverständnisse mit scalarer Multipl. zu vermeiden.

~~Anwendung~~ Die Einführung dieser Begriffe ist ungemein praktisch, wie sich allerdings erst durch die Praxis zeigt, es ist mit ihnen viel leichter zu operieren ungezwungen als mit sin und cos selbst, wie Prof Macfarlane richtig bemerkt hat. Insbesondere wird V immer benützt um Vectoren auszudrücken, die $\perp$ stehen auf anderen.

~~Einfachste Beispiel.~~ Wendet man das distrib. Gesetz auf die ~~ge~~ Componentenform des Vectors an, so folgt:

$$V a b = V(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$

$$= a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k + a_2 b_3 i +$$

$$+ a_3 b_1 j - a_3 b_2 i =$$

$$= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(- - - -) + k(-)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Einfache Anwendung: $[T V a b]^2 = a_0^2 b_0^2 \sin^2(ab) = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + - - -$

$$\sin^2(ab) = [\cos(ay)\cos(bz) - \cos(az)\cos(by)]^2 + \sim\sim$$

bekannte Formel der analyt. Geometrie

$$= a_0^2 b_0^2 [1 - \cos^2(ab)] = a_0^2 b_0^2 - [S a b]^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

bekannte algebraische Formel

1/5 ~~Probe, ob~~

Andererseits wenn man diese Formel als bekannt voraussetzt, kann man beweisen, dass factisch $Vab = \left| \quad \right|$

denn Tensor ist richtig; Richtung wird auch richtig sein wenn bewiesen, dass dieser Vector wirklich $\perp a, b$ ~~Und Richtung~~: $S.aVab$ nach Formel für Scalar Product entwickelt

$$= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

ebenso $S.\, bVab = 0$

also stimmt es. Durch Anwendung auf $i\, j\, k$ wird auch leicht gezeigt, dass das Zeichen stimmt.

Hier ist zum ersten Male eine Combination von 3 Vectoren vorgekommen $S\, aVab$

allgemeine Form ~~S a~~ $S.dVab = S.d.\, C\, a_0 b_0 \sin ab$ = Volum eines Parallelepipeds $(a\, b\, d)$; ausführlicher wird dies später besprochen werden.

In der Physik kommen ebenfalls V immer vor, wo es sich darum handelt auszudrücken dass Vectoren $\perp$ aufeinanderstehen.

z.B. ponderom. Kraft auf einen Stromleiter mit Strom i in magnetischem Feld ~~h~~ h : $= Vih$

Analog sollte nach Herz, Maxwell etc. Kraft wirken in electrost. Feld

$$= Ve \frac{dq}{dt}$$

Anderes Beispiel aus Kinematik

Starres System dreht sich um Axe ~~A~~ A mit Winkelgeschw. a

Welches ist die Geschw. eines Punktes des Körpers

Gesetz von Biot & Savart.

Ponderomot. Kraft $f = \frac{im}{r^2} \sin\delta\, ds$

und zwar ⊥ z ds u. Kraftlinien; Fleming forefinger = force, middle = current, thumb = motion } left hand

ds kann weggelassen werden, wenn auf Stromlängeneinheit bezogen

$\frac{m}{r^2}$ = magn. Kraft in Richtung m = h

$f = V i h \qquad - V(ke + K\frac{de}{dt})h$

Dies entspricht bekannter Formel Maxwell'scher Theorie

Wenn Kraft von mehreren m erzeugt so $f = \Sigma V i h = V i \Sigma h = V i \bar{h}$, wo unter h jetzt die Gesamtstärke des magn. Feldes verstanden wird, und zwar gilt dies unabhängig davon ob h bloß von magn. Massen oder auch von sonstigen elektr. Strömen herrührt (Leitungs- und Verschiebungsströmen)

Analog gilt nach Maxwell Kraft im electrost. Feld:

$V e g = V e \frac{dh}{dt}$ welche jedoch experim. Schwierigkeiten

---

Ebenso electromotorische Kraft bei Bewegung im magn. Felde

$e = V a h \qquad a$ = Geschw.

Mechanik

Drehungsmoment = $V a f$

$\frac{3}{5}$ Bevor wir aber zu ~~weiteren~~ den Anwendungen übergehen müssen wir noch Productbildung von 3 ~~Facto~~ Vectoren betrachten.

Scalare Producte [illegible] $xVab$ nichts Neues

Was aber wenn 3 Vectoren zusammengesetzt? 4 Möglichkeiten

~~$S.(aSbc)$~~ $\quad S.(aVbc) \quad$ ~~$VaSbc$~~ $\quad VaVbc$

$$S(aVbc) = S.\,aVbc =$$

$$= a_0\, SA\, Vbc$$

$$= \text{Vol. des Parallelepipedes}$$

$$= S\,b\,Vca = S\,c\,Vab$$

‖ dagegen Zeichen geändert wenn Ordnung vertauscht

$$= -S\,aVcb = -S\,bVac = -S\,cVba$$

Natürlich auch in der Componenten Form zu erhalten:

$$SaVbc = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

bekannte Formel der analyt. Geometrie für Volumen eines Parallelepipedes

Nach bekannten Determinantensätzen

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= -SaVcb = SbVca \quad \text{etc.}$$

~~Setzt man i j k an Stelle~~

Es ist natürlich ein essentieller Unterschied zw. Formeln wie obige und

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$V_a V_{bc} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 c_2 & b_2 c_1 & b_1 c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_3 c_2 & b_1 c_3 & b_2 c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} i \end{vmatrix} \; a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)$$

$$= i \left[b_1 (a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3) \right]$$
$$\quad + b_1 a_1 c_1 \qquad - c_1 a_1 b_1$$

$$= i \left[b_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \right]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ b_3 & c_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \qquad = i \left[b_1 \, S_{ac} - c_1 \, S_{ab} \right]$$

$$V_a V_{bc} = b \, S_{ac} - c \, S_{ab}$$

Ohne weitere Rechnung sieht man ein, dass $V_a V_{bc}$ in der Ebene bc liegen muss also:

$$V_a V_{bc} = u b + v c$$

um u und v zu finden:

$$\underbrace{S_a V_a V_{bc}}_{=0} = u \, S_{ab} + v \, S_{ac} \qquad V_a V_{bc} = \left[b \, S_{ac} - c \, S_{ab} \right] x$$

durch Überlegung findet man $x = 1$

weil x in Bezug auf a, b, c von Potenz $= 0$ sein muss, dabei symmetrisch etc.

Auch auf andere Weise

$VaVbc = a_1 ViVbc + a_2 VjVbc + a_3 VkVbc$

Anwendung

d zerlegen in Richtungen von a, b, c

$S| d = ax + by + cz \quad |Vbc$

~~$S.bVcd = x\,S.bVac$~~ $S.dVbc = x\,S.aVbc$

$$x = \frac{S.dVbc}{S.aVbc}$$

$$d = \frac{1}{SaVbc}\left[a\,S.dVbc + b\,S.dVca + c\,S.dVab\right]$$

Einfachste Art haben wir schon kennen gelernt:

$d = i\,Sdi + j\,Sdj + k\,Sdk$

---

10. Drehungsmoment ΣVef

Wenn Drehungsaxe = A so ~~Drehungsmoment - Compon. = ΣS~~

Arbeit $SAVef$

$S.rVab = 0$ bedeutet Ebene a b, weil nur dann Vol = 0

Früher haben wir dies in Form geschrieben $r = ax + by$

das ist äquivalent weil r der Gleichung genügt.

$V.rVab = 0$ bedeutet Gerade ⊥ ab

Auch in der Form $r = x\,Vab$

Andere Art von Zerlegung

~~$d = x\,Vab + y\,Vbc + z\,Vca$~~

~~$Sad = x$~~ $\quad d = x\,Vbc + y\,Vca + z\,Vab$

$Sad = x\,SaVbc$ etc.

$$d = \frac{Vbc\,Sad + Vca\,Sbd + Vab\,Scd}{SaVbc}$$

Wollen jetzt zu ~~auf~~ Anwendung auf Geometrie übergehen; werden wenn dabei etwas theoretisch Neues vorkommt, es an speziellen Beispielen näher erläutern ~~besprechen~~.

Geometrie der Geraden und Ebene

Gibt zugleich Beispiele für implicite Vectorgleichungen

z.B. $Sar = 0$ Ebene $\perp a$ durch O

$Sa(r-b) = 0$ " durch Endpunkt von b

Normalform ~~...~~ auch in Form $Sar = m$ denn:

~~$Sar = m$~~ ~~$Sa b = m$ ∥ b wäre nicht eindeutig bestimmt~~

$SAr = \frac{m}{a_0}$ $\quad r_0$ wobei $r = \frac{m}{a_0}$ $\quad$ bedeutet Ebene $\perp a$ in Abstand $\frac{m}{a_0}$

~~Ferner haben wir doppelte Vectorgleichungen kennen gelernt~~

$Var = 0$ bedeutet Gerade in Richtung a durch O

äquivalent mit $r = ~~m~~\ ua$

$Va(r-b) = 0$ Gerade ∥ a durch Endpunkt von b ∥ gleichbedeutend mit $r = b + ua$

~~Auch in Form~~ Eine andere Form ist: $Var = c$ ~~wenn $c = Vab$~~

2/6 ~~Wie findet man aus letzter Gleichung ... die Punkte~~ c, q ?

~~$V a c = V a V a b = a S a b - b S a^2$~~

~~Man kann es überhaupt nicht finden, unbestimmt~~

~~Das ist aber nicht die Gleichung einer Geraden sondern einer Fläche~~ Ebene!

~~wenn man das b aus $c = V a b$ bestimmen wollte so geht das nicht~~

~~Diese Gleichung~~ ist Gleichung einer Geraden welche in der Ebene, welche $\perp c$

~~durch a~~ durch a gelegt ist, so liegt dass sie $\parallel a$ und im Abstande

$\frac{c_0}{a_0}$ ist.

Was bedeutet $S r V b c = 0$? Ebene durch 0, $\parallel b c$, weil dann Vol $= 0$

früher hatten wir die explicite Form $r = u b + v c$ kennengelernt

selbstverständlich identisch

Beweis, indem dieses r eingesetzt wird

Ebenso $S a V b r = 0$ dasselbe

Es ist ja eigentlich dieselbe Formel wie vorher, nur dass stets $V b c$ gesetzt

also auch vol. Bedeutung von

$S r V b c = m$ Ebene $\parallel b, c$, im Abstand $\frac{m}{b c \sin(bc)}$

Bedeutet dann Vol. Parallelep. = mit Mecht.

Was bedeutet $V r V b c = 0$?

= Gerade $\perp b, c$, durch 0

In der That Gerade $\perp$ ~~qt~~ bc, kann auch geschrieben werden:

$r = u V b c$, dies macht obigen Ausdruck $= 0$

Soll sie nicht durch 0 Punkt sondern Punkt a durchgehen:

$V(r-a)Vbc = 0 \qquad r = a + uVbc$

Auch $VrVbc = \mathfrak{D}$ = Gerade ⊥ bc, in Ebene

Ebene, welche durch die Gerade $r = ua + b$

und den Punkt c gelegt wird:

muss Vector a und Vector b−c enthalten

$S(r-b)\,Va(b-c) = 0$

Ebene durch 3 Punkte a b c

$S(r-a)\,V(a-b)(a-c) = 0$

VI. Ebene welche durch die Axen Abschnitte l, m, n, characterisirt ist

$S(r-il)\,V(il-jm)(il-kn) = 0$

Vereinfacht:

$S(r-il)(jln + klm + imn) = 0$

$Sr(imn + jln + klm) = lmn$

Dies kommt thatsächlich auf die gewöhnl. Form der analyt. Geometrie zurück wenn S entwickelt wird:

$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$

4/6

Diese Form insbesondere in Krystallographie gebräuchlich

Gesetz der rationalen Ableitungszahlen. ~~Di~~ Statt $i\ j\ k$ kann auch

$a\ b$ – gesetzt werden z.B. für triklin. System.

Früher hatten wir eine andere Form der Ebene aufgestellt ~~K~~

$r = a + u(b-c) + v(a-b)$

Dies muss jene Gleichung erfüllen:

Thatsächlich:

$$u S(b-c)\,V(a-b)(a-c) + v\,S(a-b)\,V(a-b)(a-c) = 0$$

$$\underbrace{S(a-b)\,V(a-b)(a-c)}_{=0}$$

$$= -S(a-b)\,V(a-b)(a-c)$$

$$+ S(a-c)\,V(a-b)(a-c) \quad = 0$$

~~Ebenen in d~~

Alle diese Formen sind aber in $S(a)(r-b) = 0$ enthalten

oder $Sar = m$

---

2 Ebenen $Sar = m$

$Sar' = n$ sind parallel, weil jede $\perp a$

Abstand $= \dfrac{m-n}{a_0}$

$Sar = m$

$Sbr' = n$ bilden einen Winkel $\measuredangle ab$

Wenn $r = r'$ so ist dies eine Gerade, geometrische Anschauung ergibt

dies ohne weiteres, aber auch aus Formeln

$$\begin{array}{l|l} S a r = m & .b \\ S b r = n & .a \end{array}$$

$$b S a r - a S b r = b m - a n = V r V b a$$

Gleichung einer Geraden $\parallel V b a$

also $\perp a, \perp b$

ein Abstand

$S a r = m$ Kürzester Abstand für den Fall dass $r \parallel a$,

denn $S a r = a_0 r_0 = m$

also $r_0 = \frac{m}{a_0}$

~~Art der Maximum-Aufgabe~~

Wenn dgg Form

$r = a + b u + c v$ kann es zwar auch umwandeln in ↑

$V c r = V c a + u V c b$

$S b V c r = S b V c a$

$S r V b c = S a V b c$ also $r_0 = \frac{S a V b c}{T V b c}$

oder ~~auch~~ Maximum-Min-Aufgabe:

$T r^2 = S r^2 = S(a + b u + c v)^2$

$\frac{d T(r)^2}{d u, v} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial u} S(a + bu + cv)^2 = 0$$

Entweder aus multipl.

$$\frac{\partial}{\partial u} S(a^2 + b^2u^2 + c^2v^2 + 2abu + 2acv + 2bcuv) = 0$$

~~$2Sb^2u$~~

$$\not{2}u\, Sb^2 + \not{2}\, Sab + \not{2}v\, Sbc = 0$$

$$v\, Sc^2 + Sac + u\, Sbc = 0$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} Sab & Sbc \\ Sac & Sc^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Sb^2 & Sbc \\ Sbc & Sc^2 \end{vmatrix}} = \frac{c_0^2\, Sab - Sac\, Sbc}{b_0^2 c_0^2 - (Sbc)^2}$$

ebenso: $v = \dfrac{b_0^2\, Sac - Sab\, Sbc}{b_0^2 c_0^2 - (Sbc)^2}$

$$r = a + \frac{b\left[c_0^2\, Sab - Sac\, Sbc\right] + c\left[b_0^2\, Sac - Sab\, Sbc\right]}{b_0^2 c_0^2 - (Sbc)^2}$$

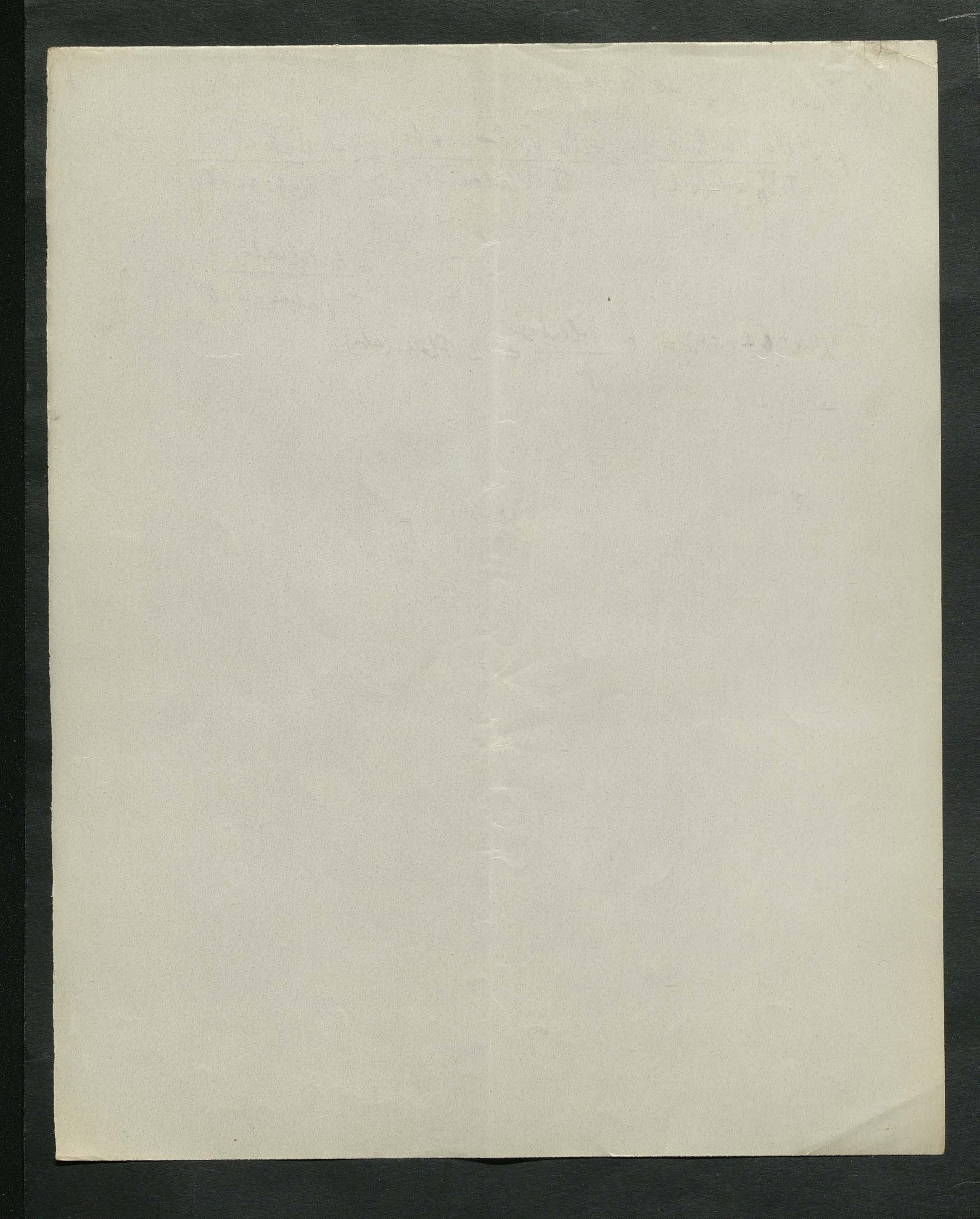
= ~~$a\, b_0^2 c_0^2 + b\, c_0^2\, Sab + c\, b_0^2\, Sac +$~~

$$S r V(a-b)(a-c) = Sa V(a-b)(a-c)$$

$$p = \frac{Sa V(a-b)(a-c)}{T V_a (a-b)(a-c)} = \frac{+Sa V(ab + ac + bc)}{T V(ab + ac - bc)} = + \frac{Sa V b c}{T. V(ab + ac - bc)}$$

$$= \frac{6. \text{Vol}(abc)}{T V(ab + ac + cb)}$$

$$T V(ab + bc + ca) = \frac{6 \text{ Vol}(abc)}{p} = 2 \text{ Fläche}(abc)$$



Flächeninhalt =

$$\frac{1}{2}\left(Vab + V(a+b)c + V(a+b+c)d\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(Vab + Vac + Vbc + Vad + Vbd + Vcd\right)$$

Flächeninhalt $= \frac{1}{2}\left(\sum_{n-1} V s_1 s_2\right) \pm \underbrace{V(a+b+c+d)e}_{=0} = \frac{1}{2} \sum V s_1 s_2$

Gilt auch räumlich

Wenn nun z.B. $e = f + g$:

So kommt dazu $+ Vfg$

nun ist aber $g = -(a+b+c+d+e+f)$

also $-Vf(a+b+ \ldots) = V(a+b+ \ldots)f$

Also auch für räumliche Polyederartige Gebilde: Σ Vectorflächen =

Σ Vector Producte von je zwei Kanten der ändern Begrenzungsfigur

Somit für geschlossenes Polyeder $= 0$

Auch in anderer Weise:

3/7

~~$r = a \cos u + b \sin u$~~

~~$r = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cos u + -$~~

$r^2 = a_1$

$r = A(i \cos u + j \sin u)$

$r = A[i \cos u + j \sin u \cos\alpha + k \sin u \sin\alpha]$

$s = uA$

$r = A\left[i \cos \frac{s}{A} + (j \cos\alpha + k \sin\alpha) \sin \frac{s}{A}\right]$

$\frac{dr}{ds} = -i \sin \frac{s}{A} + \cos \frac{s}{A}(j \cos\alpha + k \sin\alpha)$

$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{1}{A}\left[i \cos \frac{s}{A} + \sin \frac{s}{A}(j \ldots)\right] = -\frac{r}{A^2}$

$r = A(i \cos u + j \sin u) + Bku$

$r' = -A(i \sin u - j \cos u) + Bk$

$r_1 = r + vr' = A(i \cos u + j \sin u) + Bku + v\left[-A(i \sin u - j \cos u) + Bk\right]$

Im x y von $u = -v$

$r_1 = A\left[i(\cos u + u \sin u) + j(\sin u - u \cos u)\right]$

$r_1^2 = 1 + u^2$

Spirale

$r_1 = \sqrt{1 + u^2}$

$r = a\varphi(u,v) + b\psi(u,v) + c\chi(u,v)$

$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial u} + b\frac{\partial\psi}{\partial u} + c\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = a\frac{\partial\varphi}{\partial v} + b\frac{\partial\psi}{\partial v} + c\frac{\partial\chi}{\partial v}$

$N = UV\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = V \ldots\ldots$

Im speziellen Fall $r = i\varphi(u,v) + \ldots$

$$N = U\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

~~Wenn Scalar Form~~ 2 D. Gleichung einer Kugel

~~$r = i\cos u + j\sin v + k\sqrt{1-}$~~

$r = iu + jv + k\sqrt{1-u^2-v^2}$

$\frac{\partial r}{\partial u} = i - k\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$ $\qquad \frac{\partial r}{\partial v} = j - k\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$

$N = UV\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = U\left[k + \frac{jv+iu}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right] = U\left[\frac{r}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right] = Ur$

Was auch umgekehrt als Definition der Kugel hätte gelten können

---

Wenn gegeben in ~~Form~~ Scalarform

$r = ix + jy + kz$ So selbstverständlich

$F(x\,y\,z) = 0$ $\qquad \frac{\partial r}{\partial x} = i + k\frac{\partial z}{\partial x}$ weil nicht unabhängig veränderlich

$\frac{\partial r}{\partial y} = j + k\frac{\partial z}{\partial y}$

5/7

$$UV\left(i+k\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(j+k\frac{\partial z}{\partial y}\right)=U\left[k-i\frac{\partial z}{\partial x}-j\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad =U\left[k\frac{\partial F}{\partial z}-i\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-j\cdot\cdot\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad =U\left[i\frac{\partial F}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}\right]=U(\nabla F)$$

Woraus natürlich auch die Formel der analyt. Geometrie folgt:

$$\cos(Nx)=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{(\ )^2+\cdot -}}\quad \text{etc.}$$

Für nützliche Vectorf. lassen sich keine allgem. Regeln festsetzen

20. $Tr=a_0$ Kugel

$Sr^2=a_0^2$ Tensor ist ein unpraktisches Zeichen, man ersetzt es meist in dieser Weise, $T(a+b)$ ist nicht $Ta+Tb$! während wohl bei S und V

Wir werden also darauf geführt zu untersuchen wie Ausdrücke unter S und V differentiirt werden können. Ganz so wie sonst

$$\frac{d}{du}Sar=\lim\frac{Sa(r'-r)}{du}=Sa\frac{dr}{du}\quad \text{etc.}$$

Ebenso auch hier:

$$Sr'^2=a_0$$
$$Sr^2=a_0$$
$$S(r'^2-r^2)=0=2Sr\,dr$$

$$2\,Sr\,dr=0$$

das willkürliche dr muss also auf r ⊥ stehen

Da sieht man gleich, um wieviel diese Form der Gleichungen bequemer ist als die anderen

Natürlich kann man dann die Gleichung der Tangenten Ebene und die Normale sofort hinschreiben

In erster Form:

$$S\,N(r'-r)=0 \qquad r'=r+u\,N$$

$$V(r'-r)\,N=0$$

Ebenso leicht in zweiter Form, ~~aber die allgem. Formel können wir noch nicht hinschreiben~~ $S.\nabla F\,(r'-r)=0 \qquad V.\nabla F\,(r'-r)=0$

Für die dritte Form können ~~...~~ wir die allgem. Formel noch nicht hinschreiben.

Raum Curven

$$r = a\,\varphi(u) + b\,\psi(u) + c\,\chi(u) = \Phi(u) \qquad \text{(z.B. wenn } u = s \text{ Bogenlänge)}$$

$$dr = (a\,\varphi' + b\,\psi' + c\,\chi')\,du = \Phi'(u) \quad \text{in der Richtung der Tangente}$$

Gleichung der Tangente:

$$r' = r + v\,(a\varphi' + b\psi' + c\chi')$$

Normalebene:

$$S(r'-r)(a\varphi' + b\psi' + c\chi') = 0 \qquad S(r'-r)\,\Phi'(u)=0$$

~~Osculations~~ Schmiegungs-Ebene ist diejenige, welche zwei aufeinanderfolgende Vector enthält: also Vector dr und $dr + d^2r = (\Phi'(u) + \Phi''(u)\,du)\,du$

Ebene Gleichung. $S(r'-r)\,V\,\Phi'(u)\,\Phi''(u)=0$

$\frac{2}{8}$

und Richtung der Normale auf die Schmiegungs Ebene = Binormale

$= V\Phi'\Phi''$

Hauptnormale ⊥ Tangente in der Osculationsebene

also ⊥ Tangente und auf Binormale

$$V.\Phi' V\Phi'\Phi'' = \Phi' S\Phi'\Phi'' - \Phi'' S\Phi'\Phi'$$

Wenn man s als unabhängige Variable:

$T\,dr = ds$

$T\frac{dr}{ds} = 1$ dann ist Φ' = Einheitsvector in Richtung der Tangente

$T\Phi' = 1$

$S\Phi'^2 = 0$

$S\Phi'\Phi'' = 0$ also Φ'' steht dann ⊥ Φ'

Dann ist die ~~Binormale $V\Phi'\Phi''$~~ Hauptnormale in Richtung Φ''

Wir haben also das rechtwinklige System der Tangente g, Hauptnorm h

Binormale b: Φ', Φ'', $V\Phi'\Phi''$

~~Durch~~ Zwei aufeinanderfolg. Tangenten ~~sind~~ liegen in der Oscul. Ebene

Also kann dieses Curvenstück als eben angesehen werden

I). Krümmung $= \frac{1}{R} = \frac{dg}{ds} = \frac{dr}{ds}$

II). analytisch: $R_0 : ds = \Phi' ds : \Phi'' ds^2$

Haupt-Krümmungs Radius

$R_0 = \frac{\Phi'}{\Phi''}$ $\quad \frac{1}{R_0} = \frac{\Phi''}{\Phi'}$ $\quad TR = \frac{1}{T\Phi''}$

$\Phi'' ds^2$ $\quad R$ $\quad \Phi' ds$

3/8

33

Anwendungen

Kreisbewegung haben wir schon kennen gelernt in Form

$r = A(i \cos x + j \sin x)$

~~implicite Form:~~

~~$Tr = m$~~

~~$Sar = 0$~~ ~~$S\, a\, dr = 0$~~

~~$Sr^2 = m^2$~~ ~~$S\, r\, dr = 0$~~

$dr = (-i \sin x + j \cos x)\, dx$

Wenn die Bogenlänge s als unabh. Ver. eingeführt wird:

$r = A\left(i \cos\frac{s}{A} + j \sin\frac{s}{A}\right)$

$dr = (-i \sin\frac{s}{A} + j \cos\frac{s}{A})$

$d^2r = -\frac{1}{A}(i \cos\frac{s}{A} + j \sin\frac{s}{A}) = -\frac{r}{A^2} = \frac{1}{R}$

bedeutet also: Krümmungs Radius in der Richtung des Radius und Länge constant

---

Kinematische Anwendung

$r = \Phi(t) = a\,\varphi(t) + b\,\psi(t) + c\,\chi(t)$

$\dot{r} = \dot{\Phi}(t) = \text{Geschw.} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dr}{ds}$ $\quad \underset{\sim}{T=1}$

$\ddot{r} = \text{Beschl.} = \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + v\frac{d^2r}{ds\,dt}$

$= \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + v\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\frac{dr}{ds} + v^2\frac{d^2r}{ds^2}$ also [illegible] centripetale [illegible]

4/8 Daraus folgen also die bekannten Sätze über Centrifugalkraft, diese ist nichts anderes als das Stück $m\frac{v^2}{R}$; es muss also eine Kraft wirksam sein, wenn $\bar{v}$ geändert wird und auch wenn eine Krümmung der Bahn eintritt

z.B. Wenn ein Körper an einem Faden befestigt herumrotiert, so ist die Kraft, welche dieser Centrifugalkr. Gleichgewicht hält = Spannung des Fadens.

Centralbeweg.

Kraft = Beschl.; diese theils in Richtg der Bahn verwendet auf Änderung des absoluten Werts der Geschw. theils ⊥ darauf, auf Änderung der Richtung.

Soweit war alles noch einfach; viel complicirter, wenn man das eigentlich Charakteristische der Raumcurven in Betracht zieht, nämlich die Torsion. Doch liegt die Schwierigkeit nicht in der Rechng, diese ist in unserem Falle ungemein einfach ~~sondern~~, im Gegensatz zur analyt. Geom, sondern in der räumlichen Vorstellung.

Wir haben das System der 3 rechtw. Vectoren Tangente $\bar{d}$ (= Zeigefinger), Hauptnormale $\bar{h}$ (= Mittelfinger), Binormale $\bar{b}$ (= Daumen). Diese sind in ihrer gegenseitigen Lage unveränderlich, ändern bloß ihre Lage im Raume, beim Fortschreiten auf der Curve.

Wenn sie ∥ blieben, so hätten wir eine Gerade, dann wären eigentlich h und b unbestimmt. Wenn noch eine Drehung um b dazukommt, also Änderg von d und h, so wird es eine ebene Curve, und das Maß der Krümmg ist

gegeben durch Länge des Krümmungs Radius, ebenso die Richtung derselben durch die Änderung in der Richtung der Tangente

g $dt \; dg$

Wenn nun noch eine Drehung der Osculationsebene, also des Axensystems überhaupt um die Tangente b dazukommt, so wird die Curve eine räumliche, diese nennt man die Torsion oder Windung der Curve; diese ist also definiert durch den Winkel welche zwei aufeinanderfolgende Osculationsebenen, oder was dasselbe ist 2 aufeinanderfolgende Binormalen bilden. Man kann sie ebenso wie die Krümmung messen; Torsions Radius in Richtung der Änderung der Binormale also wieder nach dem Krümmungs Mittelp. gerichtet und seine Länge bestimmt durch:

reipr. Torsionsradius = Torsion = $\dfrac{\text{Winkel der Binormalen}}{\text{Bogen } ds}$

$f_{=}$

$$\frac{1}{T} = \frac{d}{ds}\, U V \frac{dr}{ds} \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds} b =$$

$$= \frac{d}{ds} V g h = V \underbrace{\frac{dg}{ds}}_{=0} h + V g \frac{dh}{ds}$$

$$=$$

$S f g = 0$

$S f b = 0$ ~~da ist f in Richtung~~

denn $= S b \frac{db}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d.Sb^2}{ds} = 0$ } also steht $f \perp b$ u. g

also in Richtung h

6/8 1/9

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = S\, h\, V g \frac{dh}{ds}$$

$$= -S g\, V h \frac{dh}{ds}$$

; Dies darf man nicht $= \frac{d}{ds} V h^2 = 0$ setzen!

Sondern $V h \frac{dh}{ds} = - V \frac{dh}{ds} h$

$V h h =$

$V h' h' = 0$

$V (h h - h' h') = 0$

$V h h - h' h + h' h - h' h' = 0$

$= V (h - h') h + h' (h - h') = 0$

$V\, dh\, h + V\, h\, dh = 0$

~~$h = \ldots$~~ ~~$R = R_0 h$~~

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{R} = \frac{h}{R_0}$$

$$h = R_0 \frac{d^2 r}{ds^2}$$

$$f_0 = -S \frac{dr}{ds} V R_0 \frac{d^2 r}{ds^2} \left[\frac{dR_0}{ds} \frac{d^2 r}{ds^2} + R_0 \frac{d^3 r}{ds^3} \right]$$

$$= -R_0^2\, S \frac{dr}{ds} V \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{d^3 r}{ds^3}$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = i \frac{d^2 x}{ds^2} + j \frac{d^2 y}{ds^2} + k \frac{d^2 z}{ds^2}$$

(§ 262 Serret)

$$T_0 = - \frac{\left(\frac{d^2 r}{ds^2}\right)_0^2}{S \frac{dr}{ds} V \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{d^3 r}{ds^3}}$$

$$= - \frac{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2 x}{ds^2} & & \\ \frac{d^3 x}{ds^3} & & \end{vmatrix}}$$

was mit Formel im § 275 Serret übereinstimmt wenn s = Unabhg.-V.

$\frac{2}{9}$ $\frac{7}{8}$ 35

Anwendung Schraubenlinie

Früher schon kennen gelernt:

$$r = A[i\cos u + j\sin u] + Bku$$

Wenn wir s einführen wollen, so müssen wir erst wissen, wie s und u zusammenhäng

(Man beliebige functionen von u einem r gleichsetzen, gibt immer eine Curve, nicht aber beliebige functionen von s, sonst kann man innere Widersprüche begehen)

$$dr = \{A[-i\sin u + j\cos u] + Bk\}\, du$$

$$(dr)_0^2 = ds^2 = du\sqrt{A^2+B^2}$$

Abkürzung: $A^2+B^2 = C^2$ $\qquad s = Cu + \text{const.}$

$$r = A\left[i\cos\frac{s}{C} + j\sin\frac{s}{C}\right] + \frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C}\, ks$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{A}{C}\left[-i\sin\frac{s}{C} + j\cos\frac{s}{C}\right] + k\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C}$$ $\Big\|$ $Sk\frac{dr}{ds} = \text{const.}$ also const. $\measuredangle$ mit k ...

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{A}{C^2}\left[i\cos\frac{s}{C} + j\sin\frac{s}{C}\right]$$ also $\perp k$

$$R_0 = \frac{1}{\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)_0} = \frac{1}{\frac{A}{C^2}} = \frac{C^2}{A}$$ also constante Krümmung

~~$k = R^2\frac{d^2r}{ds^2}$~~

~~$$b = UV\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{A}{C}\sin\frac{s}{C} & \frac{A}{C}\cos\frac{s}{C} & \sqrt{C^2-A^2} \\ \cos\frac{s}{C} & \sin\frac{s}{C} & 0 \end{vmatrix}$$~~ $= i\,\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C}\sin\frac{s}{C}$

~~$= V\frac{dr}{ds}U\frac{d^2r}{ds^2}$~~ $\qquad - j\,\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C}\cos\frac{s}{C}$

$+ k\,\frac{A}{C}$ $\qquad$ richtig

8 3/8

~~$\frac{3}{\varrho} = R_0 \frac{d^2r}{ds^2} = -\left[i \cos\frac{s}{c} + j \sin\frac{s}{c}\right]$~~

~~$f = \sqrt{g}\, \frac{dt}{ds}$~~

$$f = \frac{db}{ds} = i\,\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C^2}\cos\frac{s}{C} + j\,\frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C^2}\sin\frac{s}{C}$$ also natürlich wieder $\perp k$

$$f_0 = \frac{\sqrt{C^2-A^2}}{C^2} \qquad T_0 = \frac{C^2}{\sqrt{C^2-A^2}} = \frac{A R_0}{\sqrt{C^2-A^2}} = \frac{A}{B} R_0.$$

also constante Torsion

Aus Formel für b sieht man dass ∢ mit k Axe unveränderlich.

<u>Desto grössere Torsion je kleiner T_0 also je grösser ($B.2\pi$) die Ganghöhe</u>

Man könnte jetzt leicht die Curve finden, welche der Krümmungsmittelpunkt beschreibt; wäre ebenfalls eine Schraubenlinie. (= Evolute für ebene Curven)

Evolvente ist hier ebenfalls leicht zu bilden

$$r_1 = r - s\,\frac{dr}{ds}$$

Gibt z.B. in unserem Falle:

$$r_1 = A\left[i\left(\cos\frac{s}{C} + \frac{s}{C}\sin\frac{s}{C}\right) + j\left(\sin\frac{s}{C} - \frac{s}{C}\cos\frac{s}{C}\right)\right]$$

$Tr_1{}^2 = A^2 \left(1 + \frac{s^2}{C^2}\right)$ Endpunkt eines Fadens, welcher auf der Schraubenlinie aufgewickelt ist, und in der Richtung der Tangente gespannt wird, beschreibt also eine Spirale in der IJ Ebene.

Dies ist leicht begreiflich, wenn man sich z.B. die Schraubenlinie dadurch entstanden denkt, dass ein schief zugeschnittenes Papier auf einen Cylinder auf- ~~und ab~~gerollt wird.

Mit Raum Curven werden wir nicht viel zu thun haben, viel mehr mit Raumflächen. Überhaupt ist die Geometrie der Raum Curven noch sehr wenig entwickelt.

Beispiele wären noch: Toroid-Schraubenlinie (Solenoid eines Gramme'schen Ringes), Kegel-Schraubenlinie, etc. (Fall linie eines Körpers mit Berücks. der Erdrotation).

Sonst pflegt man Raum Curven meist als Durchschnitte von Flächen zu betrachten.

Umgekehrt kann man sich Flächen durch Bewegung gewisser Curven entstanden denken.

z.B. Cylinderflächen, ~~[illegible]~~ welche durch Beweg. einer (parallel bleibenden) Geraden (Erzeugende) längs beliebt. Curven entstehen

$$r = \varphi(u) + v a$$

$$N = U V a \frac{d\varphi}{du}$$

Normale natürlich $\perp a$: $S a N = S a U V a \frac{d\varphi}{du} = 0$

Dies ist die Differentialgleichung der Fläche, kann man natürlich auch in Form der analyt. Geom. bringen:

$$N = U \nabla F \qquad S a \nabla F = 0$$

$$a_1 \frac{\partial F}{\partial x} + a_2 \frac{\partial F}{\partial y} + a_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

~~Will man sie integrieren so:~~ ~~$S N a = 0$~~

~~$S N dr = 0$~~

~~$N =$~~

Kegelfläche: Gerade, welche immer durch einen Punkt geht, sonst auf beliebiger Curve gleitet

$$r = a + u(\varphi(v) - a)$$

$\frac{5}{9}$ $N = U V f \frac{\partial f}{\partial v}$

Daraus folgt: $N r N = 0$

z.B. Kreiskegel $r = v[A(i \cos u + j \sin u) + B k]$

$$N = U \begin{vmatrix} i & j & k \\ A \cos u & \cdot\cdot & \cdot \end{vmatrix} = U [\;\cdots (i \cos v + j \sin v) + k A^2]$$

~~z.B. $r = i a \cos \varphi + j a \sin \varphi + v(i a \cos \varphi + j a \sin \varphi + k b)$~~
~~$x = a \cos \varphi (1+v)$~~
~~$y = a \sin \varphi (1+v)$~~
~~$z = bv$~~
~~$x^2 + y^2 = a^2 (1+v)^2$~~
~~$= a^2 (1 + \frac{z}{b})^2$~~
~~$\frac{x^2+y^2}{a^2} = (1 + \frac{z}{b})^2$~~

Nachweis, dass $\angle N$ mit k Axe constant
dass $N \perp r$

Allgemein: Regelflächen erzeugt durch Bewegung einer Geraden

$r = \varphi(u) + v \psi(u)$ | Einschaliges Rotations-Hyperboloid

Spezieller Fall: Wenn die erzeugende Gerade immer eine gegebene Curve tangirt

Dann ist die Fläche developabel.

Im ersten Fall werden zwei aufeinanderfolgende Geraden windschief sein, man kann nicht eine Fläche durchlegen; hier aber enthält die Osculationsebene der Curve immer die aufeinanderfolgenden Tangenten.

$r = \varphi(u) + v \varphi'(u)$

$N = U V [\varphi'(u) + v \varphi''(u)] \varphi'(u) = U V \varphi' \varphi''$ also Normale der Fläche in Richtung der Binormale der tangirten Curve

z.B. abwickelbare Schraubenfläche: durch Tangente an Schraubenlinie

nicht " " " Gerade die $\perp$ " und Axe steht
z.B. Wendeltreppenartig

6
9
37

Rotationsflächen

durch Rotation beliebiger Curven um feste Axe, z.

im Allgemeinen nur möglich, wenn Curve eben ist und zwar in Ebene welche

die Axe enthält, immer darauf zurückzuführen.

$r = \varphi(u)$ Gleichung der Curve

$r = ~~u+at~~$ Rotations Axe (Anfangspunkt hineinverlegt)

Ausdrücken, dass ~~Projection~~ Perpendikel von einem u Punkt auf Axe constant ~~ist~~

~~Verh~~ Verhältnis Lot zur Projection $\quad r_0 = f(Sar)$

Einmal umgekehrt vorgehen

Differentialgleichung leicht aufzustellen: Normale muss Axe treffen

Wenn Anfangspunkt hineinverlegt, so N, a, r in einer Ebene

$S\,N\,Var = 0$

$N = ua + vr \quad \| \frac{u}{v} = \text{willk. } f(r)$

$S\,N\,dq = 0$

$u\,S\,a\,dq + v\,S\,r\,dr = 0$

$u\,Sar + v\,S\frac{r^2}{2} = ~~\text{const}~~\ f(u,v)$

$Sr^2 = F(Sar)$

Probe: $2Srdr = F'.\,Sadr$

~~$u + v F' = 0$~~

$Sr^2 = f(Sar)$

$2Srdr = f'(Sar).\,Sadr$

~~$N = V\,dr\,Var$~~

~~$= a\,Srdr$~~ $- r$ ~~$Sadr$~~ $\quad S\,N\,dr = 0$

~~$f[2r - f'(Sar)\,a]\,dr$~~

- - - - - - - -

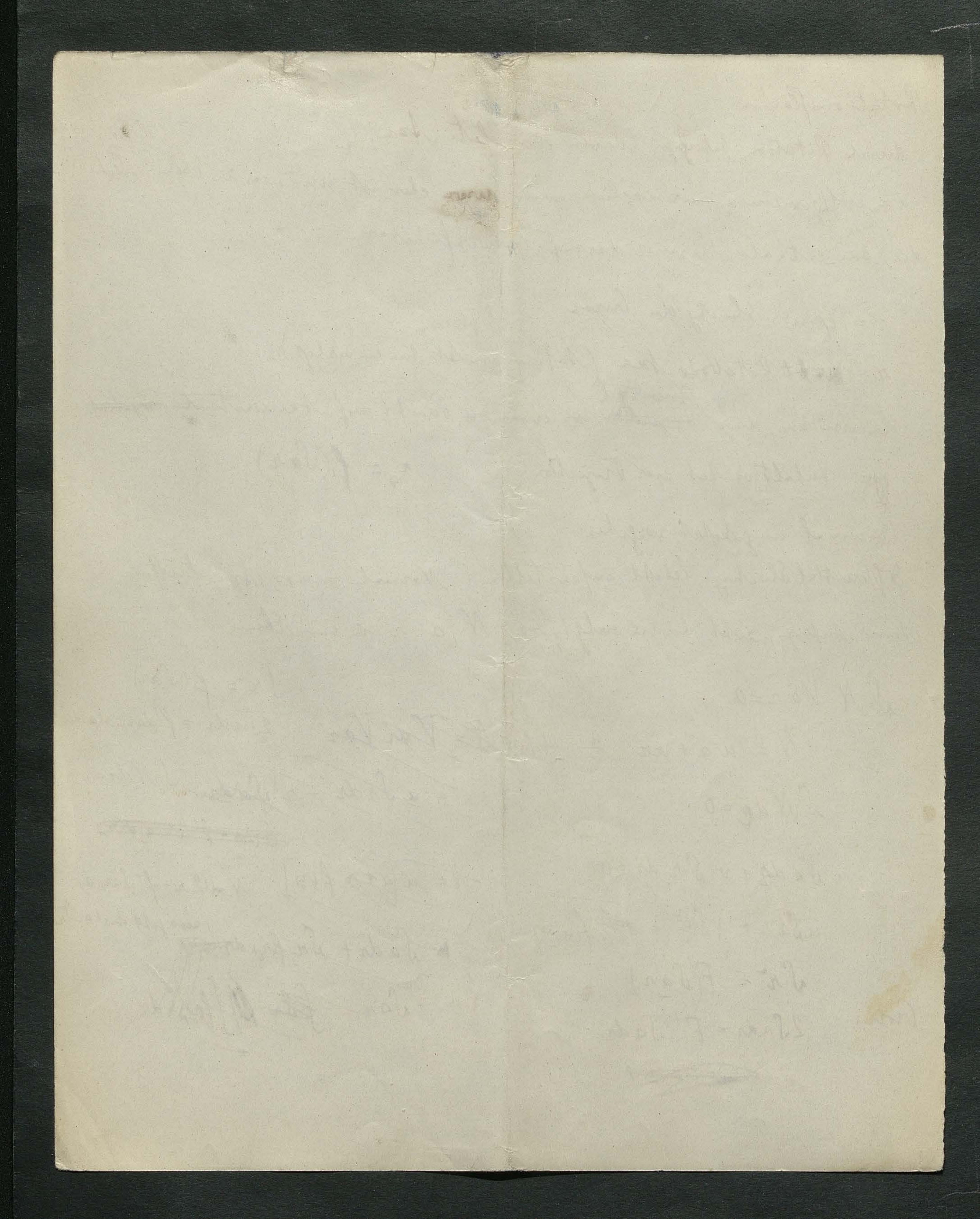
~~$N = u[a + r\,f(r)]$~~ $\quad N = \text{Mult. } r - f'(Sar)\,a$

also geht durch Axe

~~$Sadr + Sr\,f(r)\,dr$~~

$Sar =$ ~~f~~ ~~M~~ $\int f(r)\,dr$

$=$



Implicite Flächengleichungen.

Unter V Zeichen [Function] ersten Grades von r = Grade

Unter S " " " " = Ebene

" " " zweiten " " = Fläche zweiten Grades

Darauf wollen wir jetzt näher eingehen.

Allgemeinste Form einer scalaren Function welche r nur in zweiter Potenz enthält: wird enthalten, sobald wir uns auf Glieder beschränken welche nur zwei der Zeichen S, V enthalten

m, Sar, $SaVbr =$, $SrVbr = 0$, $Sar.Sbr$, Sr^2,

Es können auch Glieder mit beliebig vielen V und S, also beliebig complicirte auf diese 4 Grundformen zurückgebracht werden

zB: $S.VarVbr = S.rVbVar = Sar\,Sbr - Sab\,Sr^2$
$= ScVbr = -SrVbc$ $= aSbr - rSab$

ebenso mit complicirteren. Der allgem. Beweis kann hier nicht gegeben werden; ist am besten mit Quaternionentheorie zu machen.

Also: $m + Scr + nSr^2 + \sum Sar\,Sbr = 0$

Dass dies eine Gleichung zweiten Grades ist sieht man ohne weiteres wenn man sich die Sundtipl. ausgeführt denkt.

Es lässt sich diese Form noch vereinfachen: Coord. Transf. $r_1 = r + h$

$$\underbrace{[m + Sch + nSh^2 + \sum Sah\,Sbh]}_{F_0} + \underbrace{[Scr + 2nSrh + \sum Sah\,Sbr + \sum Sar\,Sbh]}_{F_1} + \underbrace{[nSr^2 + \sum Sar\,Sbr]}_{F_2} = 0$$

2/10 ~~[illegible]~~

Die Grösse h kann man nur durch die Forderung bestimmen, dass $F_1 = 0$ wird.

$$F_1 = Sr\left[\underbrace{a + 2n\,h + \Sigma Sah.b + \Sigma c\,Sbh}_{=0}\right]$$

h ist dabei als Unbekannte aufzufassen, also lineare Vectorgleichung I Grades

Wenn dies gemacht ist, so sieht man dass +r und −r die Flächengleichung erfüllen: sie ist auf den Mittelpunkt bezogen d.h. wir haben den Anfangspunkt in den Mittelpunkt verlegt

Betrachten wir bei dieser Gelegenheit diese Gleichung ersten Grades genauer

Man könnte sich daran geben die i, j, k Componenten einzeln = 0 machen dann hätte man 3 Bestimmungsgleichungen für die 3 Componenten von h.

Dies ist thatsächlich die sonst in analyt. Geometrie übliche ~~[illegible]~~ langweilige und unübersichtliche Methode. Hier können wir aber erst anders verfahren.

h kann zerlegt werden in Componenten nach 3 Richtungen

~~haben betreffende Formel schon kennen gelernt~~: h = von der Form $\Sigma a\,Sbh$

$$h = z\,Vab + x\,Vbc + y\,Vca$$

$$Sah = x\,Sa\,Vbc \quad \text{etc.}$$

$$h = \frac{Vbc\,Sah + Vca\,Sbh + Vab\,Sch}{SaVbc}$$

Scheinbar ist dies ein Umweg aber dadurch wird eine Gleichförmigkeit des obigen Ausdruckes erzielt.

Er kann jetzt geschrieben werden in Form:

$$c + \sum a S b h = 0$$

Das nennen wir eine lineare Vectorfunction von h, und bezeichnen sie mit $\phi(h)$
Es handelt sich also darum wie man solche Gleichungen auflöst

Kann immer zurückgebracht werden auf 3 Vectoren

$$a S b h + a' S b' h + a'' S b'' h = c$$

$$\phi(h) = c$$
$$h = \phi^{-1}(c)$$

$S a V a'$ |

$$S a V a' a'' \, S b'' h = S a V a' c$$

$$S b'' h = \frac{S a V a' c}{S a V a' a''} \quad \Big| \quad S b' h = \frac{S a'' V a c}{---} \quad \Big| \quad S b h = \frac{S a' V a'' c}{---}$$

Somit nach Vorhergehendem Satz:

$$h = \frac{V b' b'' \, S b h + V b'' b \, S b' h + V b b' \, S b'' h}{S b V b' b''} =$$

$$= \frac{V b' b'' \times S a' V a'' c + V b'' b \times S a'' V a c + V b b' \times S a V a' c}{S b V b' b'' . S a V a' a''} = \phi^{-1}(c)$$

Diese Formel braucht man selbstverständlich nicht auswendig zu lernen; sie ist ziemlich complicirt, aber wenn man die Sache in der sonst üblichen Weise rechnen würde wäre sie noch viel complicirter.

Mit diesen linearen Functionen werden wir noch ungemein viel zu thun haben,

Jetzt begnügen wir uns vorerst mit diesem Resultat, dass wir wissen, dass man das h auch immer auflösen könne, so dass $F_1 = 0$ wird.

4/10

Wir können also die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung schreiben:

$$n\, S r^2 + \sum S a r\, S b r = -F_0$$

constanter Vector, zusammengesetzt aus den übrigen

Erste Seite $= S r\,[n\, F r + \sum a\, S b r]$

$= S r\,[n\, r + \sum b\, S a r]$

Betrachten wir nun den speziellen Fall, wo durch diese Transformation nicht nur F, sondern auch F_0 verschwindet

Dann steht uns ~~zu~~ Bemerkenswertes:

~~Wenn~~ Wenn ein bestimmtes r der Gleichung genügt, so genügt ihr auch $2r$, $3r$, ~~etc~~ etc

~~Also~~ Also Gleichung einer Kegelfläche

Allgemeine Form derselben haben wir letztes Mal schon aufgestellt

$r = u\, \varphi(v)$ Explicit ~~Übung zu zeigen, dass übereinstimmt~~

Wenn wir einsetzen: $n\, S \varphi^2(v) + \sum S a \varphi(v)\, S b \varphi(v) = 0$

$$= S\varphi\,[n\varphi + \sum a\, S b\varphi] = 0 \quad \text{für jedes } \varphi$$

also muss $\uparrow$ $= 0$ sein

$\varphi = i\, f_1(v) + j\, f_2(v) + k\, f_3(v)$ ~~Wenn man einsetzt, so muss für sich~~

~~$n f_1 + \sum a\, S b f_1 = 0$ etc~~

3 Gleichungen
$$\begin{cases} n f_1 + \sum a_1\,(b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3) = 0 \\ \\ \end{cases}$$

aus denen f_i etc. zu bestimmen

Einfacher zu zeigen dass die Diff. Gleichg. ein spec. Fall der früheren ist.

Dort hatten wir $S\,Nr = 0$

~~$dr\,[n \ldots + \Sigma\, a\, S\, br + b\, S\, ar] = 0$~~

also

$$2n\, S\, r\, dr + \Sigma\, S\, br\, S\, adr + \Sigma\, ar\, S\, bdr = 0$$

$$S\Big[\underbrace{2nr + \Sigma(a\, S\, br + b\, \Sigma\, ar)}_{N}\Big]\, dr = 0$$

$S\,Nr = 2n\, S\,r^2 + 2\, \Sigma\, ar\, S\, br = 0$ also genügt unsere Form wirklich jener Gleichg.

Mit Kegel wollen wir uns weiterhin nicht mehr beschäftigen, wir nehmen also an:

$$n\, S\, r^2 + \Sigma\, S\, ar\, S\, br = 1 \quad \text{(Durch Division durch } F\text{)}$$

$$= S\, r\,\underbrace{(nr + \Sigma\, a\, S\, br)}_{\phi(r)}$$

Also mit Kegelausnahme haben wir $S\, r\, \phi(r) = 1$ ~~$= S\, r(\Sigma\, a\, S\, br)$~~

Differenziren:

$$S\, r\, \Sigma\, c\, S\, br = 1$$

$$S\, dr\, \Sigma\, c\, S\, br + S\, r\, \Sigma\, c\, S\, bdr = 0$$

$$S\, dr\, \Big[\underbrace{\Sigma\, c\, S\, br + \Sigma\, b\, S\, cr}_{N}\Big] = 0$$

Also Tangential Ebene Gleichung (s)

$$S\, N(s - r) = 0$$

Wir bemerken im Vorhinein dass sich ϕ immer auf eine 3 gliedrige Grundform zurückführen lässt also

$$S\, r\,[a\, S\, br + a'\, S\, b'r + a''\, S\, b''r] = 1$$

$S Ns = S Nr$

$\sum S sc\, S br + \sum S s b\, S cr = 1$ Hier ist r gegeben zu denken und s variabel

Man sieht nun, N setzt sich zusammen aus

ϕ und einer ganz ähnlichen, dessen symmetrischen Function ϕ'

Man sieht auch leicht ein, dass

$S s\, \phi(r) = S r\, \phi'(s)$ ϕ' nennt man conjugirt

und dies die Definitionsgleichung für conjugirte Functionen

~~Die Tangential Ebenen Gl.~~ Die Tangential Ebenen Gleichung kann jetzt geschrieben werden:

$S s\, \phi(r) + S s\, \phi'(r) = 0$

~~Nach [illegible]~~ Wenn also in der Form geschrieben

$S s \left[\sum (c S br + b S cr) \right]$ also sieht man, dass es die Gleichg. einer Ebene ist

Umgekehrt: $S r \left[\sum (c S bs + b S cs) \right] = 1$ auch Gleichung einer Ebene wobei jeder Punkt, welcher der Fläche r angehört, auch in der Tangential Ebene liegt, die durch s geht, also Polar Ebene von s

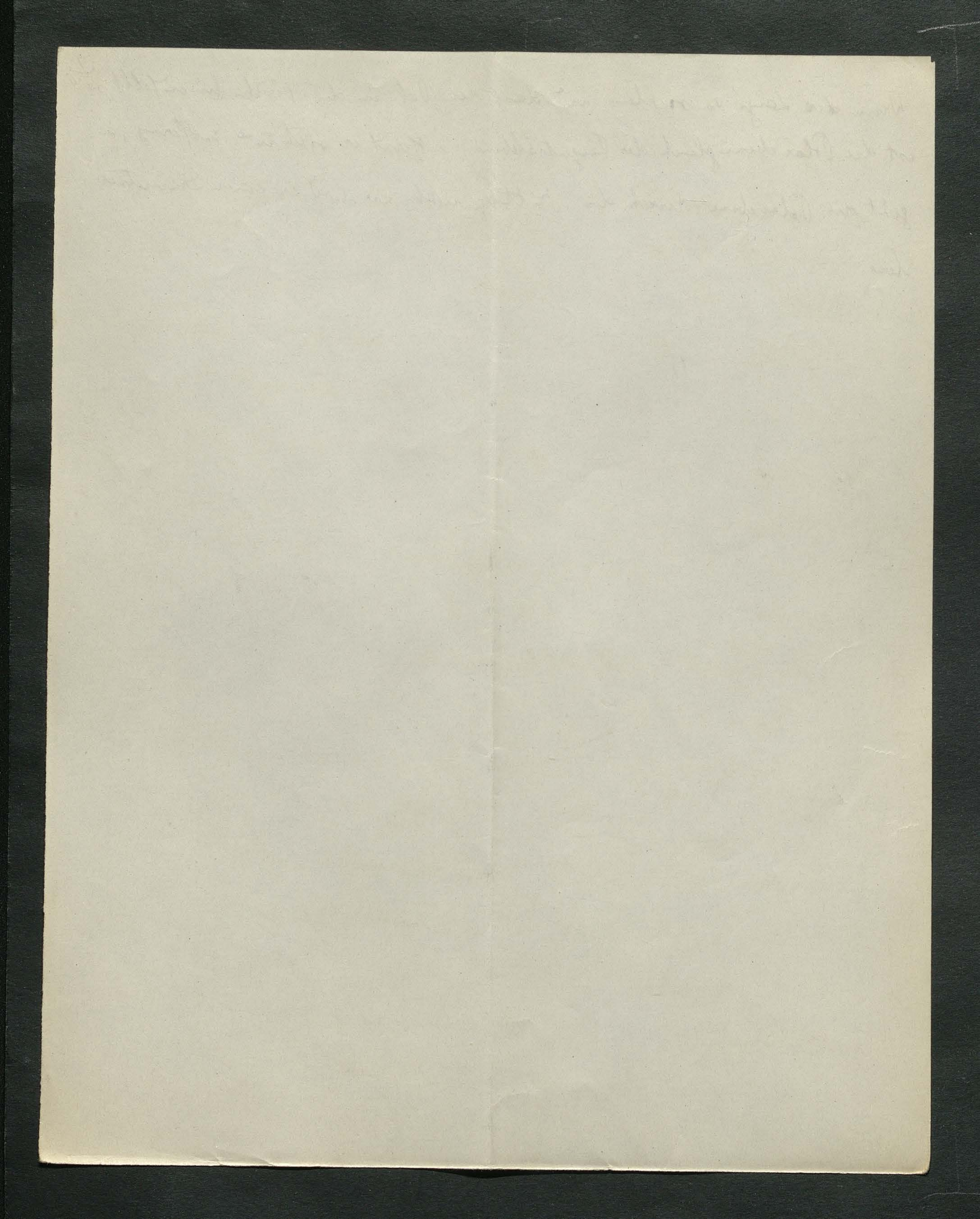
Also Richtung der Polar Ebene: $\sum (c S bs + b S cs)$

bleibt also parallel wenn s nur Entfernung nicht aber Richtung ändert; die Richtung von s nennt man Polare.

Wenn die Länge so so klein wird dass der Pol in die Fläche hineinfällt, so ist die Polarebene gleich der Tangentialebene, entfernt er sich in ∞ Entfernung, so geht die Polarebene durch den Mittelpunkt, sie wird zu einer Diametral-Ebene.

7/10

41



Die Transformation der Ellg. auf den Mittelpunkt hatte uns letztes Mal dazu geführt, eine lineare Vectorfunction aufzulösen

~~Es war dies das Stück~~ F_1

Wir haben erwähnt, dass eine solche Function, welche wir der Kürze wegen mit $\varphi(h) = \sum a\, S b h$ bezeichnen

und welche allgemein ~~als~~ als eine Summe von beliebigen Vectoren Ausdrücken definirt werden kann, die h nur in der ersten Potenz enthalten,

in ~~die~~ eine dreigliedrige Form $\varphi(h) = a\, S b h + a'\, S b' h + a''\, S b'' h$

gebracht werden kann.

Eine ganz ähnliche, in gewissem Sinne symmetrische Form wäre

$$\varphi'(h) = b\, S a h + b'\, S a' h + b''\, S a'' h$$

welche wir die zu φ conjugirte lineare V. Function nennen wollen.

Wir sehen sofort dass

$S s \varphi(r) = S r \varphi'(s)$ und dies kann uns ebensowohl als Definition für die conjugirte Function dienen

Diese linearen Vectorfunctionen ~~und deren weg~~ sind in der mathem. Physik von der grössten Wichtigkeit, und ~~das ist~~ der eigentliche Grund warum in der Physik das Ellipsoid eine so grosse Rolle spielt (Trägheits Ellipsoid, Wärme Ellipsoid, Deformations Ellipsoid, Druck Ellipsoid, Doppelbrechg. etc) ist, das es die bequemste Veranschaulichung für diese lineare Vectorfunctionen bietet. Auch hier nehmen wir zur Veranschaulichg. Ell obwohl auch nicht für andere gültig

3/11 Diese Abkürzung ist von großem Vortheil weil sie die Übersichtlichkeit erleichtert; Wir können jetzt die auf den Mittelp. bezogene Ell. Gleichung schreiben

$S r \varphi(r) = 1$ oder auch $S r \varphi'(r) = 1$

$\Sigma S r (a S b r + a' S b' r + \dots) = 1$ $\quad \Sigma S r (b S a r + b' S a' r + \dots) = 1$

Auch die Summe bilden:

$S r (\frac{\varphi + \varphi'}{2})(r) + S r \frac{\varphi - \varphi'}{2}(r) = 1 \quad = S r \frac{\varphi + \varphi'}{2}(r)$

$\Sigma S r \underbrace{(a S b r + b S a r)}_{} + \dots = 2$

dies kann man $= 2\varphi(r)$ nennen $\quad \varphi = \frac{\varphi + \varphi'}{2}(r)$

Es hat die Eigenthümlichkeit, dass $S s \varphi(r) = S r \varphi(s)$

man nennt dies selbst conjugiert

und kann sagen: Ellipsoid Gleichung drückt aus, dass das Scalar Product aus dem Vector r und einer selbst conj. Function = const ist.

Man kann also immer die ~~conjugierte~~ linearen Vectorf. in der Ellipsoid Gleichung ersetzen durch eine selbst conjugierte.

Nun will ich die Normale und Tangential Ebene bilden

$S dr \underbrace{\Sigma a S b r} + S r \Sigma a S b dr = 0$

$S dr \underbrace{\Sigma(a S b r + b S a r)}_{\text{Richtg. d. Normale}} = 0$

$= 2\varphi$

$S dr \varphi(r) + S r \varphi(dr) = 0$

$\nwarrow = \nearrow$

$S dr \underbrace{\varphi(r)}_{\text{Normalvector}} = 0$

Da haben wir schon eine Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen r und $\varphi(r)$

Ein anderes Flächenpaar. ebenfalls Ellipsoid

Jetzt kann ich die Ell. Gleichung so interpretieren:

$$r_0\, \varphi_0(r) \cdot \cos\vartheta = 1$$

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{r\cos\vartheta} = (\text{Perpendikel})^{-1}$$

$$\varphi(r) = (\text{Perp.})^{-1} \text{ in Bezug auf Länge und Richtung}$$

Wenn ich diese Fusspunkte aufsuche so ist der Gleichung $p = \varphi(r)$

$$dp = \varphi(dr) \qquad S\, r\, \varphi(dr) = S\, dr\, \varphi(r) = 0$$

~~Normale~~ =

$$S\, r\, dp = 0$$

das sagt aber aus, dass $dp \perp r$ daher hat die Normale in p die Richtung von r

Man nennt zwei solche Ellipsoide conjugirt. oder reciprok (Spezialfall von MacCullagh's theorem über Reciprocalflächen) (Heaviside 261, Tait 1287)

Jetzt Gleichung der Tangential Ebene: wenn s den RV zu einem Punkt der Ebene bedeutet

$$S\,(s-r)\,\varphi(r) = 0 \quad \text{oder explicite} \quad S(s-r)\,\Sigma(a\,Sbr + b\,Sar) = 0$$

$$S\, s\, \varphi(r) = 1$$

(also viel einfacher Rechnung mit φ)

$$S\, s\, \Sigma(a\,Sbr + b\,Sar) = S\, r\, \Sigma(a\,Sbr + b\,Sar)$$

$$2\, S\, s\, \varphi(r) = 2$$

$$S\, s\, \varphi(r) = 1$$

Der Name „Function" ist da in etwas erweitertem Sinne gebraucht. Zusammenhang zwischen Vect.– wenn einer eine Fläche beschreibt, so beschreibt der andere auch eine Fläche und die Abhängigkeit dieser voneinander wird Function genannt.

3/11 43

4/11

man kann aber die Gleichung auch schreiben

$\int r\,\varphi(s) = 1$ | $\frac{1}{2}\int r\,\Sigma(a\int bs + b\int as) = 1$

Wenn man da s als fix auffasst, dagegen r variabel, so giebt dies wiederum eine Ebene, und zwar sieht man dass, falls r in der Fläche liegt, es zugleich auch der Tangirungs Ebene von s angehört, also

liegen die Tangirungs Punkte von s aus in einer Ebene = Polar Ebene

und Richtung von s = Polare, s = Pol.

Der Kegel unmittelbar ersichtlich

~~Lässt man s immer näher an die Fläche heranrücken, so kommt auch~~

Wenn man nun verschiedene s $2s, 3s$ nimmt, so werden

die entsprechenden Polar-Ebenen

~~$\int r'\,\varphi_1(s_1) = 1$ $\int r'\,\varphi_2(s_2) = 1$~~

~~$= \int s_1\,\varphi_1(r') = 1$~~ $= \int s_2\,\varphi_2(r') = 1$ etc.

$\int r'\,\varphi(2s) = 1$ $\int r'\,\varphi(3s) = 1$

$= 2\int s\,\varphi(r')$ $= 3\int s\,\varphi(r') = 1$ also sämmtlich parallel

also $\int s\,\varphi(r) = \frac{1}{2}$ $\int s\,\varphi(r) = \frac{1}{3}$

Kommt der Punkt s in die Fläche hinein, so wird die Polar Ebene zur Tangential-Ebene, geht er in ∞ Entfernung, so wird

5
11
41

die Gleichg: $S s\varphi^{\neq}(r) = 0 = S r\varphi'(s)$

welcher auch $r = 0$ genügt, d.h. ~~es geht~~ dann geht die Polar Ebene durch den Mittelpunkt, wird zur Diametralebene.

Hat man eine solche Polare gewählt, so kann man in der entsprechenden Diametralebene eine zweite wählen, dann ist eine dritte schon bestimmt durch die Schnittgerade dieser beiden Diametralebenen

Oder anders: Man legt durch die Polare eine Schnittebene dann ~~sind~~ kann man ~~an~~ der Schnittcurve tangirende Geraden legen die der zweiten Polare parallel sind.

Für solche 3 Durchmesser ist nach obiger Gleichg: $d\ d'\ d''$

$$\begin{cases} S d\varphi d' = 0 \\ S d\varphi d'' = 0 \\ S d'\varphi d'' = 0 \end{cases}$$

---

3 conjugirte Durchmesser; die Tangential Ebenen in den Endp. sind ∥ den beiden anderen; sie halbiren alle Sehnen welche den anderen ∥ sind

---

In der ursprüngl. Ellipsoid Gleichungen sind 6 willk. Vectoren Man kann sie jetzt ~~[illegible]~~ immer auf 3 conj. Durchmesser ~~[illegible]~~ zurückführen, ~~[illegible]~~, und bis zu einer ~~[illegible]~~

Oben schon angedeutet

~~z.B. $S r(a\, S b r + a'\, S b' r + a''\, S b'' r) = 1$~~

~~$N = a\, S b r + a'\, S b' r + a''\, S b'' r$~~

$\frac{1}{2} S r\left[(a\, S b r + b\, S a r) + (a'\, S b' r + b'\, S a' r) + (\quad)\right] = 1$

$= \frac{1}{2} S r\left[(a+b)\, S(a+b) r + \ldots - (a-b)\, S(a-b) r + \ldots\right]$

Dann kommt die Gleichg. auf 3 Vectoren zurück:

$$S r [a S a r + a' S a' r + a'' S a'' r] = 1$$

Wollen jetzt nicht näher darauf eingehen, wie diese Vectoren aus den andern sich bestimmen lassen, sondern beschränken uns zu zeigen, dass die Richtungen a, a', a'' conj. sind.

Denn: Wenn $r = a$ $\varphi = a S a r + a' S a' r + a'' S a'' r$

so wird Normale $N = a S a^2 + a' S a' a + a'' S a'' a$

$\perp a' a'' = V a' a''$

$V N V a' a'' = a' S N a'' - a'' S N a' = V a V a' a'' S a^2 + V a' V a' a''$

$= a' [S a a'' S a + S a' a'' S a' a + S a''^2 S a'' a]$

$- a''$

Wenn $a = V a a'$ gesetzt, so $N = a'' S a'' V a a'$

$r = V a' a''$ $N = a S \ldots$

$r = V a'' a$ $N = a' S \ldots$

Wenn $S a \varphi(a')$ gebildet wird so ist dies =

$= S a^2 S a a' + S a a' S a'^2 + S a a'' S a' a''$

$S V a a' \varphi(V a' a) = S V a a' [a S a V a a' + a' S a' V a a' + a'' S a'' V a a']$

$= S V.$

Damit können wir die Gl.-Ch. leicht transf.

$$\int d\varphi d' = 0 = \int d'\varphi d \qquad \int d\varphi d = 1$$
$$\int d'\varphi d'' = 0 = \int d''\varphi d' \qquad \int d'\varphi d' = 1$$
$$\int d''\varphi d = 0 = \int d\varphi d'' \qquad \int d''\varphi d'' = 1$$

$$r = \frac{x}{d_0} d + \frac{y}{d_0'} d' + \frac{z}{d_0''} d''$$
$$\int r\varphi r = \int\left(\frac{x}{d_0} d + \frac{y}{d_0'} d' + \frac{z}{d_0''} d''\right)\int\left(\frac{x}{d_0}\varphi d + y\varphi d' + z\varphi d''\right)$$
$$= \frac{x^2}{d_0^2} + \frac{y^2}{d_0'^2} + \frac{z^2}{d_0''^2} = 1 \qquad = \int r\varphi r$$
$$x = \frac{\xi}{d} \qquad \frac{\xi^2}{d_0'^2} + \frac{\eta^2}{d_0'^2} + \frac{\zeta^2}{d_0''^2} = 1$$

$$\varphi = \frac{d}{d_0}\int d\varphi r + \frac{d'}{d_0'}\int d' r + \frac{d''}{d_0''}\int d'' r$$

allgem. Gleichg. bezogen auf conj. Durchm.

gewöhnl. Gleichg. bezogen auf conjugierte Durchmesser.

Jetzt Aufgabe die Maxim. Min. von r zu finden

$$dT_r^2 = d\int r^2 = 0 = 2\int r\,dr = 0$$

Das heißt soviel wie: Radius hat dort größte und kleinste Länge, wo die Tangentialebene ⊥ daraufsteht, also wo Normale und r zusammenfallen.

Es entsteht also die Aufgabe diese Richtungen zu finden.

Diese führt auf die berüchtigte cubische Gleichung mit den 3 Axenrichtungen als Wurzeln. Wir werden uns dafür nicht weiter interessieren sondern nur zeigen 1) dass 3 Richtung ⊥ aufeinander stehen.

Wenn eine solche Richtg. bekannt ist, so zweite in der entsprechenden Diametralebene. Diese hat wenigstens 1 Richtg. gibt also senkrecht

können also in die Richtungen unsere i j k hineinlegen

$\alpha = i\, m_1$

$\alpha' = j\, m_2$

$\alpha'' = k\, m_3$ also: $\varphi = m_1\, i \int i r + m_2\, j \int j r + m_3\, k \int k r$

Somit. $m_1 (\int i r)^2 + m_2 (\int j r)^2 + m_3 (\int k r)^2 = 1$

Jetzt können wir beweisen, dass es andere Richtungen nicht mehr gibt

wo $\sum V i r \int i r = 0$ falls $m_1\, m_2\, m_3$ verschieden sind.

wollte man sie bestimmen, so wäre dies nicht möglich:

$$\sum V i r \int i r = m_1 x (m_2 k y - m_3 j z) + m_2 y (m_3 i z - m_1 k x) + m_3 z (m_1 j x - m_2 j y)$$

~~wird identisch = 0~~

$\equiv 0$

In der letzten Zeit haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass φ lauter positive Glieder enthält, offenbar ist dies nicht nötig; können auch negativ sein.

$\varphi = m_1\, i \int i r + m_2\, j \int j r + m_3\, k \int k r$ Ellipsoid

wenn $j\sqrt{-1}$ statt j so wird j Axe imaginär = einschaliges Hyperboloid

$j\sqrt{-1}$ und $k\sqrt{-1}$ j und k " = zweischaliges "

alle drei können nicht imag. werden, weil auf der rechten Seite positiv 1 steht.

Beispiele! Ausrechnen Rotationshyperboloid durch Rotation einer windschiefen Geraden um Rot. Axe.

Nachzutragen zu pag 7/11:

~~Andererseits~~

Also wenn man 3 conj. Durchmesser kennt, so kann man immer die Gleichung darauf transformiren, so dass sie die Form bekommt:

$\varphi = d \int dr + d' \int d'r + d'' \int d''r$

Andererseits leicht zu zeigen dass wenn

– – – – –

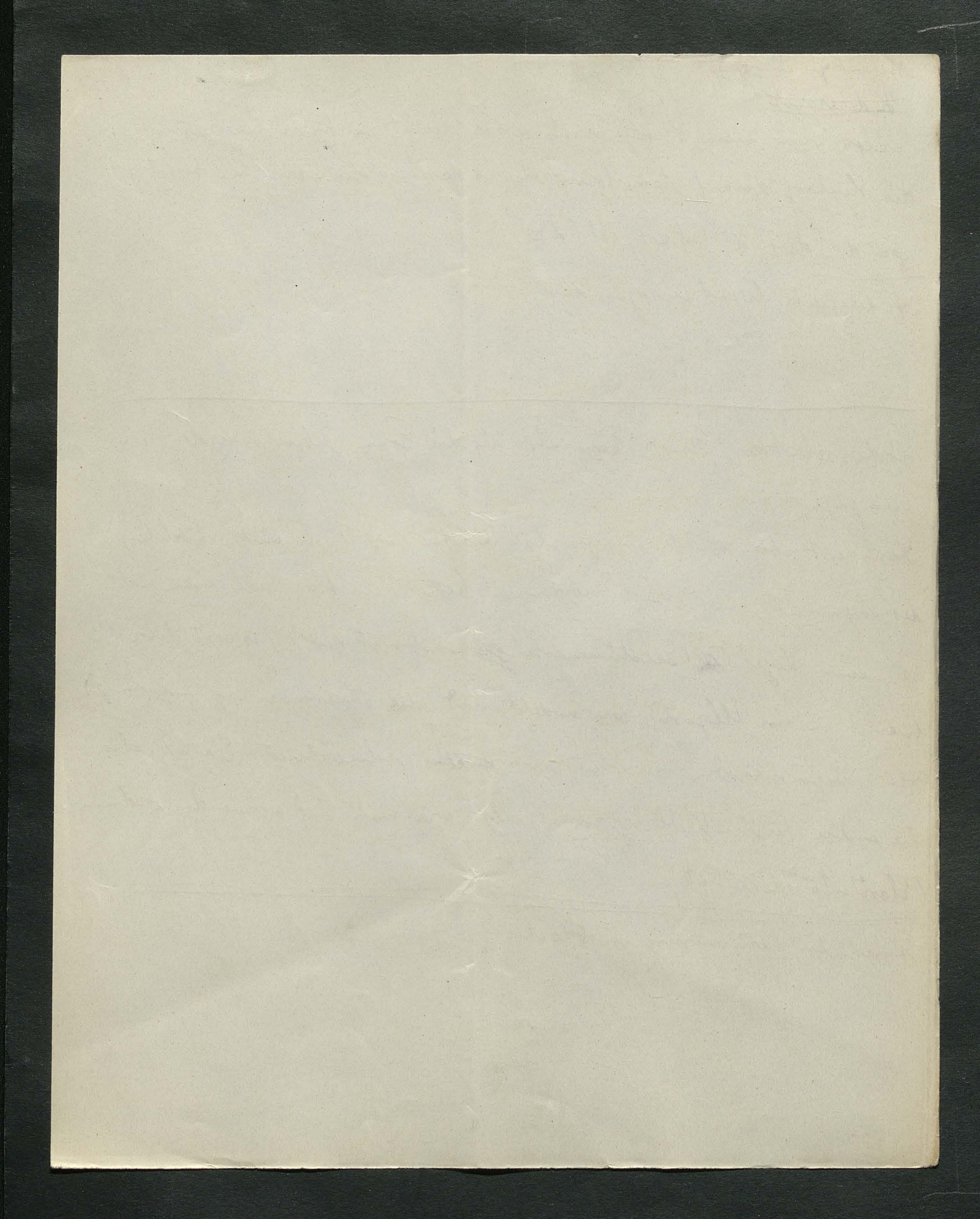
Jede selbstconj. Funct. kann also in die Form gebracht werden:

$\varphi = m_1 i \int i r + \ldots\ldots$

Das heisst aber nichts anderes, als dass die conj. F_1 in einer Ausdehnung des Arguments in 3 ⊥ Richtungen besteht. Also wenn man sich z.B. eine Kugel in einer ~~der~~ Gelatinemasse ~~ges~~ construirt denkt, so wird diese dadurch in ein Ellipsoid verwandelt und der Zusammenhang zwischen je zwei correspondirenden Punkten wird mit ~~durch~~ φ bezeichnet. Dies ist also eine andere Versinnbildlichung von φ, welche wir noch viel anwenden werden.

(Elasticitätslehre etc.).

Excurs über Krümmung von Flächen.



Physikalische Anwendungen.

Wir werden da nicht in der sonst üblichen Reihenfolge vorgehen; sondern z.B. die spezielle Mechanik starrer Körper für den Schluss lassen, da wir dort die eigentl. Quaternionen anwenden können. Dagegen Electr., Hydrod., Elastiz. anfangs vornehmen. Nur kurze mechanische Einleitung bezüglich der Grundbegriffe.

Mechanik des freien Punktes.

Statik: $\Sigma f = 0$

Wenn gezwungen auf Flächen oder Curven zu verbleiben

$V \Sigma f \, N = 0$ (↑ Flächen Normale)

$S \Sigma f \frac{dr}{ds} = 0$ (↑ Tangente der Curve)

Natürlich auch aufzufassen als Stellung einer Ebene in welcher f liegen kann, ohne Bewegg. zu S)

Dynamik

$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \Sigma f$ Zusammensetzung der Kräfte selbstverständlich falls man einmal anerkennt, dass die Kraft als Vector zu behandeln ist.

Natürlich kann dies auch in die Form der Statik zurückgebracht werden

$\Sigma f - m \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$ wobei also dann zu den sonst wirkenden äusseren Kräften noch $m \frac{d^2 r}{dt^2}$ als „Trägheitskraft" hinzugefügt werden muss

Dies $m \frac{d^2 r}{dt^2}$ kann zerlegt werden wie schon früher gezeigt wurde

$= m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R} + m \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{dr}{ds}$ in Componenten längs der Bahn und ⊥ dazu (Centrifugalkraft)

Operirt man auf obige Gleichung mit $S\frac{dr}{dt}$

So erhält man

$$\frac{m}{2}S\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \int dr\ \Sigma f = \Sigma\int f\,dr + const$$

nennt man Arbeit der Kräfte

Also Unterschied der LK = der dazwischen geleisteten Arbeit

$$\frac{m}{2}S\left(\frac{dr}{dt}\right)_1^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_2^2 = \Sigma\int^2 f\,dr$$

oder auch (wenn f eine blosse Function des Ortes ist und) wenn sich die Integration ausführen lässt $\int f\,dr = -P$

$$\frac{m}{2}S\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + P = const$$

Summe aus actueller und potentieller Energie = const.

$\frac{1}{13}$

Wenn wir Centralkräfte haben: Wenn Kraft immer nach dem Anfangspunkt wirkt:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = U(r)\ P$$

~~I. Daher wird eben, dann den~~

~~$V\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt} = V\frac{dr}{dt}U(r)$~~

$$V\frac{d^2r}{dt^2}\,r = 0$$

$$V\frac{dr}{dt}\,r = const = \mp c$$

Man differenziert folgen dem ersten

$$\frac{d}{dt}Vrr = Vr\frac{dr}{dt} + V\frac{dr}{dt}r = 0$$

also nicht $Vr\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}Vr^2$!

$$\frac{d}{dt}Vr\frac{dr}{dt} = V\frac{dr}{dt}\frac{dr}{dt} + Vr\frac{d^2r}{dt^2}$$

Das heisst:

1). Richtung ⊥ Geschw. u Rad. = constant also Bahnebene constant

2). Flächengeschwindigkeit auch der Grösse nach constant. $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$
Ganz unabhängig von P (könnte auch von Geschw. selbst abhängen).

Hier haben wir die Differ. von S und V besprochen, nach Variabeln t.
Der Vollständigkeit wollen wir erst die Dif. von U und T besprechen, welche mitunter Anwendung finden.

Diesmal rein geometrisch:

$$\frac{dTr}{dt} = S\dot{r}\,Ur = \frac{Sr\dot{r}}{Tr}$$

folgt auch unmittelbar daraus dass $Sr^2 = (Tr)^2$

$$Sr\dot{r} = Tr\frac{dTr}{dt}$$

$$\frac{dUr}{dt} = V.\,U(r)\,\frac{V\dot{r}\,U(r)}{r_0}$$

$$= \frac{1}{T(r)^2} V.\,U(r)\,V\dot{r}r = \frac{VrV\dot{r}r}{(Tr)^3}$$

$= \dot{r}\,Sr^2 - r\,Sr\dot{r}$

$VaVbc = bSac - cSab$

$Tr = \sqrt{Sr^2}$

$\frac{dTr}{dt} = \frac{2}{2}\frac{Sr\dot{r}}{Sr^2} = \frac{Sr\dot{r}}{T(r)}$

$U(r) = \frac{r}{T(r)} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{\dot{r}}{T(r)} - \frac{r\,Sr\dot{r}}{T^3}$

Eine gute Übung, diese Sätze rein rechnerisch zu finden aus $r = Tr.\,Ur$

Jetzt wollen wir als Beispiel einer Centralbewegung die Planetenbewegung untersuchen

$$\ddot{r} = k\frac{U(r)}{T(r)^2} \qquad Vr\dot{r} = c$$

Da erinnern wir uns, dass wir eben eine Formel entwickelt haben, die man hier benützen kann, daraus:

$$V\ddot{r}c = k\,\frac{dU(r)}{dt} \quad \text{integriert:}$$

$$V\dot{r}c = k\,U(r) + a$$

a ist ein constanter Vector, ⊥ c weil $Sac = 0$.

Da haben wir schon 2 Integrationsconstanten a und c; daher müssen die jetzigen Gleichungen schon die vollständige Lösung enthalten, wir müssen sie nur noch etwas durch Elimination umformen; um das · in $V\dot{r}c$ zu entfernen operiren wir mit Sr:

3/13

$S_r V r c = S c V r r = S c^2 = S a r + k\, S r\, U(r)$

$$S c^2 = S a r + k\, T(r)$$

Daraus sehen wir schon dass r auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen muss, denn wenn wir bilden $k^2 (T r)^2$ so ist dies gleich einer 2 - -

$$k^2 S r^2 = \left[S c^2 - S a r \right]^2$$ also eine in r quadratische Scalargleichung

nachdem r ausserdem in der Ebene $\perp a$ liegen muss, sieht man ohneweiteres dass es Ellipse, Hyperbel, sein muss.

Unmittelbar aus obiger Gleichung ersichtlich, wenn in gewöhnl. ~~cod~~ absoluten Coord. umgeschrieben

$c_0^2 = a_0 r_0 \cos\varphi + k r_0$

$r_0 = \frac{c_0^2}{k + a_0 \cos\varphi} = \frac{c_0^2}{k} \frac{1}{1 + \frac{a_0}{k}\cos\varphi}$ bekannte Polargleichung der Ellipse, wenn $\frac{a_0}{k} < 1$

Hyperbel – > 1

$\frac{a_0}{k}$ = Excentricität. Vollständig ist die Lösung noch nicht.

Keplers Problem wird dadurch freilich nicht erleichtert.

Diese Rechnungen würden z. B. mit rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten ungemein langwierig sind, gehen da also sehr leicht. Allerdings macht die Methode den Eindruck von blossen Kunstgriffen, doch ist dies auch bei der gewöhnl. Art der Fall

Andere Fälle (Erste und Dritte reziproke Potenz) sind in Tait's Buch behandelt.

Ellipse mit Sonne im Centrum — Spirale

Andere Gesetze lassen sich schon schwer integrieren z. B. Maxwell's G. $\frac{1}{r^5}$ führt auf elliptische Functionen

Angenähert periodische Bahnen sind natürlich bei jedem Gesetz mit Anziehung möglich; Newton: Winkeldurchschnitt $\frac{\pi}{\sqrt{n+3}}$ wenn prop. r^n

Natanson

Bisher nur Mechanik von Punkten, Statik

kann zusammengefasst werden in Satz, dass bei jeder virtuellen Verschiebung

d. h. einer unendlich kleinen solchen Verschiebg., welche bei den starren

Verbindungen etc. möglich ist, Arbeit $= 0$ ist. $\Sigma f\, \delta r = 0$

Dynamik daraus abgeleitet durch D'Alembert'sches

Prinzip $S\left(\Sigma f - m \frac{d^2 r}{dt^2}\right) \delta r = 0$

Gilt nicht nur für Punkte, sondern für ganz beliebig complicirte Systeme

in Form $S\Sigma\left(f - m\frac{d^2 r}{dt^2}\right)\delta r = 0$

~~Wir betrachten nur einen Fall: starrer Körper~~

Dies umfasst auch die Bewegungen, wo Punkte gezwungen sind, auf

Flächen oder Curven zu bleiben; ~~Satz~~ dann ist die Art dieses Zwanges

in δr ausgedrückt

z. B. wie wir letzthin für Statik abgeleitet haben, wenn Punkt auf

Curve r bleiben muss:

$$\delta r = \underbrace{\frac{dr}{ds}}_{f(s)} \delta s \qquad S\,\Sigma f \cdot \frac{dr}{ds} \Big| \delta s = 0$$

$$S\,\Sigma f \frac{dr}{ds} = 0$$

wenn auf Fläche, so $\delta r \perp N$ $\qquad \delta r = V N . \delta s$

$$S . f\, V N \delta s = 0 = S \delta s\, V f N = 0$$

$$V f N = 0$$

5/3 Wenn Kräfte auf verschiedene Punkte wirken, so müssen die betreffenden

δr in der Summe eingeführt werden

z.B. Maschine

$$\Sigma\left(f_1\,\delta r_1 + f_2\,\delta r_2 + f_3\,\delta r_3 - m\frac{d^2 r}{dt^2}\right) = 0$$

In diesem Falle wird $\delta r_1\ \delta r_2\ \delta r_3$ durch ~~Eine~~ ein einziges δs ausdrückbar; der Factor muss dann $=0$ sein.

~~Eine~~.

Wir beschränken uns auf Bewegung eines starren Körpers; dann sind die δr auf einfache Weise mit einander verbunden

Um dies zu finden, betrachten wir die Bewegung eines Punktes eines starren Körpers.

Wenn $a=0$:

$$g = Vrb$$

b = Lage der momentanen Drehungsachse, das gilt natürlich für jede Lage von r (auch schiefe)

sonst

$$\frac{dr}{dt} = g = a + Vrb$$

|| also auch $\delta r = \delta a + Vr\delta b$

willk.

a ist ein Vector mit 3 willk. Größen, ebenso b, daher im Ganzen 6 Freiheitsgrade

Setzt man dieses ein in

$$\sum S\left(f - m\frac{d^2 r}{dt^2}\right)\left[\delta a + Vr\,\delta b\right] = 0$$

Die Σ wird $= \int$ über das ganze Volum

Einzuschieben auf pag $\frac{5}{13}$

Zusammensetzung verschiedener Drehungen

$V r b + V r b' + \dots = V r (b + b' + \dots)$

steht dann pag drei!! obenstehend

---

a kann zerlegt werden in Comp. in Richtg b $= a'$ und $\perp$ dazu a''

$a'' + V r b$ kann aber aufgefasst werden als blosse Rotation

da $a'' = V b a'''$

$a'' + V r b = V(a''' + r) b$ also Rotation um eine ~~~~ parallele Axe

---

daher brauchen wir bloss die Zerlegung $g = a' + V r' b$

zu betrachten, wo a' in Richtg. b, also Schraubenbewegg.

Momentanaxe

$$\int V r f \, dv = \int V r m \frac{d^2 r}{dt^2} dv$$

Wenn $= \varphi$ = Drehungsmoment der Kräfte

$\mathfrak{M}_1 = 0$:

$$\int m V r \frac{d^2 r}{dt} dv = \text{const} = \gamma$$

$$\frac{dr}{dt} = a + V r b$$

$$\int m (V a r + V r V r b) \, dv = \gamma$$

$$\int m \, dv \, V r V r b = \gamma$$

$$S b \gamma = \int m \, dv \, \underbrace{S b V r V r b}$$

$$= S V r b V r b$$

$$S b \gamma = S (V r b)^2$$

Kettenlinie

$$f = \frac{d \, T}{ds}$$

$$X = \frac{d(T \cos\alpha)}{ds} \qquad g = \frac{d(T \sin\alpha)}{ds} = c \frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{ds}$$

usw. $\qquad 0 = \frac{d \, T \cos\alpha}{ds} \qquad T \cos\alpha = c$

$$g s = c \frac{dy}{dx}$$

$$g \frac{ds}{dx} = c \frac{d^2 y}{dx^2} = g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$g \sqrt{1 + z^2} \, dx = c \, dz$$

$$y = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$$

$$y' = e - e$$

$$g x = \int \frac{c \, dz}{\sqrt{\cdots}} = \lg(z + \sqrt{1 + z^2})$$

$$\int \delta a \cdot \int \left(f - m\frac{d^2h}{dt^2}\right) + \int \int \left[\int \left(f - m\frac{d^2h}{dt^2}\right) V r\, \delta b\right] = 0$$

δa ist willk., daher muss $\int \left(f - m\frac{d^2h}{dt^2}\right) dt = 0$

also $\int f\, dt = \int m \frac{d^2h}{dt^2} dv$ $\qquad \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt} + V r \frac{db}{dt}$

$$= \frac{da}{dt} \int m\, dv + V \cdot \frac{db}{dt} \int m r\, dv$$

Wenn man nun den Punkt O im Schwerpunkt annimmt, so verschwindet $\int m r\, dv = 0$

also dann $\int f\, dv = \frac{da}{dt} \int m\, dv = \frac{d^2a}{dt^2} M$ also so als ob alle Kräfte im Schwerpunkt vereinigt wären

Bei dieser Gelegenheit kommen wir also auf den Schwerpunkt zu sprechen

Definition $\quad M \bar{s} = \int m r\, dv \quad$ ($\bar{s}$ = Distanz zw. Schwerp. s Coord. Anf.)

Woraus folgt $\quad M s_1 = \int m x\, dv$

$M s_2 = \int m y\, dv$

$M s_3 = \int m z\, dv$

Dann bleibt

$$\int \int V r\, \delta b \int \ldots = 0 = \int \int \delta b\, V r \int \left(f - m \frac{d^2h}{dt^2}\right) dv$$

$$\int V r f\, dv = \int V r \int m \frac{d^2h}{dt^2} dv$$

$$= V \int r m \left(\frac{da}{dt} + V r \frac{db}{dt}\right) dv = ~~M \int r \frac{da}{dt} +~~$$

$\frac{J}{13} = V \frac{da}{dt} \int r \, dm \, dv + \int V f r m V r \frac{db}{dt} dv$

$= 0$ wenn Schwerp.

$= \int m \, dv \, f \cdot V r V r \frac{db}{dt}$

$= r \, S r \frac{db}{dt} - \frac{db}{dt} S r^2$

$r \, r_0 \cos(rb)$

$\int S r^2 \cos^2 rb \, dv$

$S r^2 \ldots \cos$

$\beta^2 \Phi = \beta [S r^2 . S \beta^2 - (S r \beta)^2]$

$+ (S r \beta) [\beta \, S r \beta - r \, S \beta^2]$

$= V \beta V r \beta$

$\perp \beta$

$V \mathfrak{z} V a r = a \, S a \mathfrak{z} -$

$\frac{S r^2 \, S \beta^2 - (S r \beta)^2}{\beta^2} = K.$

$= T (V \rho \beta)^2$

$\rho^2 \beta^2 \sin^2 ..$

Lk.:

$\int dm \left[\frac{da}{dt} + V r \beta \right]^2 = \int dm \, v_0^2 + 2 \int dm \, S v_0 V r \beta + \int dm (V r \beta)^2$

$= K$

$= f \, S v_0 V \int r \, dm \, \beta$

"0 jedenfalls ..."

Wir kommen jetzt zu dem physikalisch ~~w~~ wichtigsten Theile:

Betrachtung der physikalischen Felder und Anwendung der diesbezüglichen Differentialoperatoren.

Eigentlich kann man den grössten Theil des Stoffes, der ~~die~~ in den Lehrbüchern der mathem. Physik behandelt wird (darin subsummieren z.B. ganze Potentialtheorie, fast die ganze Hydromechanik, Electrostatik etc. Eigentlich kann man es aber nicht als Physik auffassen, da diese Betrachtungen sämmtlich ganz davon unabhängig sind, was für physikalische oder auch geometr. Grössen man jedesmal unter den Vectoren etc. versteht, sondern eher als einen Theil der Geometrie, allerdings in einem weiteren Sinne, da darin ausser den drei Raum Coordinaten eben noch ein vierter Vector vorkommt, welcher an jeder Stelle des Raumes einen bestimmten Wert hat. Föppl hat ~~nennt~~ desshalb auch seinem Buche, welches diese Theorien behandelt, den Titel: „Geometrie der Wirbelfelder" gegeben; Eigentlich schon zu speciller Name, Geometrie der physikalischen Felder wäre richtiger. Was unter einem physikalischen Feld gemeint ist, wird aus speciellen Beispielen klar: magnetisches, electrostatisches Feld. Jedem Punkt des Raumes ein Wert einer bestimmten Vector- oder Scalargrösse zugeordnet, welche sich im Allgemeinen stetig aneinander anschliessen. Nur ausnahmsweise können Unstetigkeiten der Grösse oder Richtung eintreten.

Zuerst wollen wir die Diff. Ops. selbst kennen lernen

Scalare Felder.

z.B. Gravitations Potential, Electrost. Pot., Magnet. Potential,

Electron. Pot., (vielwertig ~~deutig~~), Hydrod. Druck-Potential, Temperaturfeld,

~~Sättigungs~~ Concentrationsfeld von Lösungen z.B. Salz in Wasser

Den wichtigsten Operator, welcher hierbei fortwährend gebraucht wird,

haben wir schon einmal kennen gelernt. Es war das Hamilton ∇
(Nomenclatur Nabla, Vex, Triangle, verkehrt Δ)

Nehmen wir z.B. Temperatur Verteilung $\vartheta = f(x, y, z)$

Äquipotentialflächen (Isothermen) sind dann gegeben durch $\vartheta = \text{const}$
(das wäre die Scalar Form der Flächengleichung)

Wir haben schon früher gefunden, dass dann die Richtung

der Normale gegeben ist durch $N = U(\nabla\vartheta)$

wo $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

die absolute Grösse von ∇, also $T(\nabla\vartheta)$ wird ~~dann~~ die Änderungsgeschwindigkeit

von ϑ in dieser Richtung der Normalen anzeigen.

$\nabla\vartheta$ ist also ein Vector, welcher ~~die Richtung und~~ Änderungsgrösse in der Richtung

des grössten Abfalls misst. (Name: Slope) Das folgt ja auch unmittelbar aus dem

algebraischen Ausdrucke, da dann $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ etc. die Componenten der Änderungsgeschw.

werden; die absolute Änderungsgrösse ist dann $\sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)^2}$.

Aus dieser Bedeutung folgt ohneweiters dass $\nabla\vartheta$ unabhängig vom ~~W~~ der Lage

von $i\ j\ k$.

$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \cdots$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ [cos α ...]

Wenn wir d. Wärmeleitg betreiben so

Wärme~~fluss~~ strömung $h = \kappa \nabla \vartheta$

In Mechanik : Kraft $f = \nabla P$ wenn P = Potential

Dass stimmt ~~kommt~~ natürlich mit Cartes. vollkom. überein $X = \frac{\partial P}{\partial x}$ etc.

Die Umkehrung dieses Operators ist das Linienintegral

$P = C + \int S f\, ds = \Sigma [S f_1 ds_1 + S f_2 ds_2 + \ldots.]$ wobei wohl zu beachten, dass

ebenf f und s im Allgem. nicht gleichgerichtet sind

Ein anderer Operator welcher auf Scalarfunction angewendet werden kann:

~~$(a\nabla) = a$~~ $(S a \nabla).\vartheta = (a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z})\vartheta$

Das bedeutet also den Unterschied zwischen den Werten von ϑ im Anfgs und Endpunkte von a, falls a unendlich klein ist, also wie man kurz sagen kann: den Differentialquotienten von ϑ in der Richtg von a

$= a_0 \frac{d\vartheta}{ds}$ wenn ds die Richtg von a hat

Aus der Formel, ebenso wie aus der Anschauung folgt natürlich, dass

$(S a \nabla)\vartheta = S(a. \nabla\vartheta)$ dass gilt aber nur für scalare ϑ functionen für

Vectorfunctionen, ~~wo~~ wird die Sache viel complicirter und dann ~~bekommt~~ wird

eigentlich $S a \nabla$ ~~hier~~ erst von praktischer Wichtigkeit.

Hier bedeutet also d. wenn a = Einheitsvector : $(a\nabla)P$ = Kraft

Vectorfelder

Nehmen wir zuerst wieder diesen letzten Operator vor

$(S a \nabla)$ ~~kann man natürlich nicht direct auf ein Vector anwenden so den~~

~~nur entweder $S\nabla$ oder $V\nabla$~~

Er kann ebenso gut auf Vectoren wie auf Scalare angewendet werden

und hat dieselbe Bedeutung z.B. wenn c = Geschwindigkeit in einer Flüssigkeits

bewegung bedeutet mit Componenten $c \begin{cases} c_1 = u \\ c_2 = v \\ c_3 = w \end{cases}$

$$(S a \nabla) c = i \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$+ j \left(a_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \cdots \qquad \right)$$

$$+ k \left(\quad \cdots \quad — \quad \right)$$

Da geben also die Componenten die ~~Unterschiede~~ Differentialquotienten der u v w ~~an~~ in Richtung von a an, also im Ganzen kann man auch dies wieder auffassen als

Differentialquotienten nach Richtung von a; natürlich sehen ferner den Unterschied

dass es wieder eine Vectorgrösse wird mit 3 Comp.

Ein Fall der sehr häufig vorkommt ist dass a eine Geschwindigkeit

bedeutet. z.B. Bei scalaren Functionen Wärmeleitung in einer

bewegten Flüssigkeit. Es interessiert uns die Temperaturzunahme der

Flüssigkeit an bestimmter Stelle $\frac{d\vartheta}{dt}$ oder aber die Temperaturzunahme

einer sich weiter bewegenden Flüssigkeitsportion $\frac{d\vartheta}{dt} + (S c \nabla)\vartheta$

Ebenso bei Vectorfunctionen

...gen kann man offenbar ∇ nicht ohneweiters auf Vectorfunction anwenden,
...nur entweder $S.\nabla$ oder $V.\nabla$.

Dafür eigene Namen, da sie so häufig vorkommen und eine offene Bedeutung
...en: $S.\nabla$ = divergence (– convergence bei Maxwell), $V\nabla$ = curl (Maxwell)
Rotation (Weinstein)
spin

$$\nabla a = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

Bedeutung davon wird gleich klar, wenn man an Hydromechanik denkt:

$$\nabla c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$ Bekannter Ausdruck aus der Continuitätsgleichung:
(Unabhängig von Coordinaten)

$$dy\,dz\left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u\right] + dx\,dz \cdot \frac{\partial v}{\partial y} dy + \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

Überschuss der auf einer Seite ausfließenden der Masse in ein Volumelement
die andererseits einströmende. Natürlich falls incompressible Flüssigkeit,
muss dies ~~natürlich~~ = 0 sein ; $\nabla c = 0$ bekannte Continuitätsgleichung
|| Wenn man sich Quellen in jedem Vol. El. denkt Ergiebigkeit derselben
... z. B. in Gasen nicht nöthig ~~doch~~.
... z. B. in Wärmeströmung ~~Electricitätsströmung~~ Da, wenn a einen Wärmestrom bedeutet
pro Volumelement
... ist $dv.\,\text{div}\, a$ = Überschuss der weggeh. Wärmeströmung, dann muss
...lich die Temperatur sich erniedrigen; wenn C = spec. Wärme

$$C\,dv.\,\frac{d\vartheta}{dt} = dv\,\text{div}\,a \qquad \text{also} \qquad C\frac{d\vartheta}{dt} = -\,\text{div}\,a$$

...s zusammen mit der früher abgeleiteten Gleichung $a = \kappa\nabla\vartheta$
~~...~~ ist Grundgleichung der Wärmeleitung; es folgt daraus $C\frac{d\vartheta}{dt} = -\kappa\,\nabla\nabla\vartheta$

worauf später noch zurückgekommen wird.
Wenn Wärmequellen: z. B. durch El. Strömung erzeugt

Aus dem blossen Begriffe kann man gleich einen viel benutzten Integralsatz ableiten: Indem man es aufteilt in die Volumenelemente

$$\iint S a N \, dF = \iiint \operatorname{div} a \, dv$$

denn alles was drinnen ist, muss durch die Oberfläche hinausgeströmt sein

Das ist nichts anderes als ein Spezialfall des Greenschen Satzes

$$\iiint \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint (a_1' - a_1)\, dy\, dz + (a_2' - a_2)\, dx\, dz + \ldots$$

$$= \iint a_1' \, dy\, dz + a_2' \, dx\, dz + \ldots \quad \ldots$$

$$= \iint (a_1^F \cos l + a_2^F \cos m + a_3^F \cos n)\, dF = \iint S a N \cdot dF$$

$$V \nabla a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \operatorname{curl} a$$

Einstweilen natürlich nur als Abkürzung eingeführt

Die Bedeutung davon ist etwas weniger leicht einzusehen

Die wird erst klar wenn man wieder mechanische Anwendung macht

Dazu müssen wir einen Exkurs über den allgemeinen Begriff eines starren Körpers einschieben.

Excurs über Bewegung eines starren Körpers:

$$g = a + V r \,\overline{)b}$$

Zusammensetzung verschiedener Drehungen

$$g = \underset{+a'+\dots}{a} + V r\,\overline{)b} + V r\,\overline{)b'} + \dots = \underset{+\dots}{a} + V r(b + b' + \dots)$$

Gleiche aber entgegengesetzte Drehungen um parallele Axen, wenn

~~$g = V r b - V r' b$~~

$$V r\,\overline{)b} - V r'\,\overline{)b} = V(r - r')\,\overline{)b}$$

constant, unabhängig von Lage des Eindpunktes im Körper, daher = Translation $\perp$ $r - r'$, b

Zerlegung von a in Comp. $\perp$ und $\parallel$ b $= c + mb$

$$g = c + V(r)\,\overline{)b} + mb \qquad c = V b\,\overline{)d}$$

$$= V b(r + d) + mb$$

Schraubenbewegung; als solche kann in jedem einzelnen Momente die allgem. Bewegung eines starren Körpers aufgefasst werden; Momentanaxe ist die Axe dieser Schraube, (in Entf. $-d$ ‹ $\parallel$ b) wird natürlich im Allgem. in jedem Moment eine andere Lage haben.

Jetzt: $\operatorname{curl} g = \operatorname{curl}(a + V r\,\overline{)b})$

$$= \operatorname{curl} V r\,\overline{)b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} y & z \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z & x \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & y \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$V r b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{+b_1 + b_1\right\} + \ldots = 2(i\,b_1 + j\,b_2 + k\,b_3) = 2b$$

Also ist die Drehungsgeschw. in diesem Falle $b = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,q$

Man kann natürlich die ~~Diff~~ Diff.-Operatoren als bloße symbolische Abkürzungen einführen und sie immer auflösen in $i\,\frac{\partial}{\ldots}\ldots$, aber der eigentliche Nutzen für die Vorstellung liegt eben darin, dass sie unabhängig sind von den speziellen Coordinaten, was auch im Symbol-Zeichen angedeutet ist, in dem es die Coordinaten nicht enthält, und dass sie durch den bloßen Namen schon an ihre Wirkungsweise erinnern.

So erinnert also div schon daran dass der Flüssigkeitsfluss, welcher durch den Vektor dargestellt wird, an der betreffenden Stelle divergiert, d.h. ~~sich~~ auseinanderströmt, also dass mehr aus einem Volumelement ausströmt als einströmt; den Überschuss pro Vol.element ist eben durch den Betrag von div gegeben.

Ebenso erinnert der Name curl = Quirl an Wirbel oder Rotation und an die mechanische Interpretation dieser Operation

---

Ebenso wie wir div mit einem Integralsatz in Verbindung gebracht haben ist curl auch mit einem vielgebrauchten Satze associiert:

~~Stokes~~ $\iint N\,\mathrm{curl}\,a\,dF = \int a\,dr$

Am Einfachsten in umgekehrter Weise zu beweisen:

Im Uhrzeigersinn rechtsläufigen Sinne positiv

$\int S\,a\,dr$ über geschlossene Curve kann in Netzwerk zerlegt werden

$= \sum \int S\,a\,dr$

$= \sum \int (a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz) = \iint$ ~~$dF_1\ \mathrm{curl}_1 a + dF_2\ \mathrm{curl}_2 a +$~~

wenn zerteilt = Summe der Projectionen auf die 3 Axen Ebenen

$= \sum \int f \frac{\partial a_1}{\partial y}\,dy\,dx + \frac{\partial a_2}{\partial x}\,dy\,dx \quad + \ldots$

von der Projection auf XY

$= \sum$ ~~[durchgestrichen]~~

$= \sum \int \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) dF_3 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x}\right) dF_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) dF_2$

(curl$_3$, curl$_1$, curl$_2$)

$= \sum \int S.\,\mathrm{curl}\,a.\,N.\ dF = \iint S\,N\,\mathrm{curl}\,a.\ dF$

Einen andern Beweis werden wir noch später kennen lernen

Satz von Stokes.

Integrale von der Form $\int S\,a\,dr$ nennen wir Linienintegrale von a über die

$\iint S.N\,b.\,dF$ Flächen---

Also das ~~Flächenintegral~~ ~~Linienint~~
Flächenintegral ~~eines~~ des curls eines Vectors = Linienintegral über den Umfang der Fläche.

~~Man könnte nun fragen, wie groß das Integral über ein Stück einer solchen Curve ist~~

Man sieht nun folgendes:
Sobald die Begrenzungs Curve ~~constant~~ dieselbe ist, ist der Wert des $\int$ von der übrigen Form der Fläche ganz unabhängig.

daher auch $\iint$ Normal a $d\sigma$ über geschlossene Fläche = 0

Wie groß $\int$ über Curvenstück. Das wollen wir nur in einem speciellen einfachen Falle betrachten:

Wenn curl überall = 0 ist, ist das ganze Linienintegral = 0

also $\int_A^B + \int_B^A = 0 \qquad \int_A^B = \int_A^B$ ganz unabhängig von dem Integrationswege

[Wir betrachten dabei einstweilen nur einfach zusammenhängende Räume]

Dann ist der Wert desselben also eine eindeutige Function des Endpunktes von B, und zwar eine scalare Größe:

also $\int_A^x = f(x) = P$ — Das gilt aber wie gesagt nur wenn curl = 0 überall

Wenn Endpunkt x sich etwas verschiebt: $\int_x^{x+dx} \mathfrak{a}\, dr = -\delta P$

$a_0\, ds \cos(a\, ds) = -\delta P$

5/15

57

$$a_0 = -\frac{\delta P}{ds \cos(a\, ds)}$$

Flächen gleichen Wertes von P

$$a_0 = -\frac{\delta P}{\delta p}$$

P ändert sich am meisten in der Richtg von a also

$a = -\nabla P$ denn rot. auch Richtg des stärksten Abfalles von P

Da erkennen wir also die gewöhnliche Bedeutg von P, a etc.

P = Potential eindeutig, resp. Arbeit, a = Kraft, Feld wirbelfrei wollen wir nennen,

Dann heißen also diese Sätze: Arbeit über geschlossenen Curve = 0

Potential kommt auf denselben Wert zurück.

Wo dagegen curl a ≷ 0, dort gibt es überhaupt kein Potential für a.

z.B. Magnetische Kraft im Innern eines Stromleiters.

Einen besseren Einblick in diese Dinge gewinnt man noch nach

Einführg der doppelten Diff. Oper.

Wenn man zwei nach einander anwendet z.B.

$$\mathrm{div}\,\nabla P = S\nabla\nabla P = \frac{\partial}{\partial x^2} \;\cdots\; = \nabla^2 P$$

Laplace'scher Operator

$\mathrm{curl}\,\nabla P = 0$ also wie auch oben: Kraft welche von einem Pot. herrührt ist wirbelfrei verteilt

$$\left[\nabla\,\mathrm{div}\, a = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) \;\cdots\right]$$

$$\nabla^2 a = i\,\nabla^2 a_1 + j\,\nabla^2 a_2 + k\,\nabla^2 a_3$$

~~curl~~

$\operatorname{div} \operatorname{curl} a = 0$ also curl eines Vektors ist verteilt wie Geschwindigkeit in einer incompress. Flüssigkeit

$\operatorname{curl}^2 a = \nabla \operatorname{div} a - \nabla^2 a$

Bilden wir uns nun die Ausdrücke ~~die~~ curl a und div a

Ersten = 0 nach Voraussetzung d.h. curl $\nabla P = 0$

Dies gilt ganz allgemein für ein beliebiges scalares P

Ausrechnen!

$$\text{div } a = \text{div } \nabla P = S \nabla \nabla P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots = \nabla^2 P$$

Laplace'scher Operator

Dreifache Verbindungen von zwei Operationen wollen wir näher untersuchen

Von scalaren ~~Operationen~~ Functionen können wir bilden:

$$\text{div } \nabla P = \nabla^2 P$$

$$\text{curl } \nabla P = 0$$

Von Vectorfunctionen:

$$\nabla \text{ div } b = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + \right)\left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \right)$$

~~curl~~ div curl b = 0 Ausrechnen

curl curl b = curl² b

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial^2 b_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial z} \pm \frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} \right) + \cdots$$

$$= i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$= i \left[\frac{\partial}{\partial x} \text{ div } b - \nabla^2 b_1 \right]$$

$$+ j \left[\frac{\partial}{\partial y} \text{ div } b - \nabla^2 b_2 \right]$$

$$+ k \left[\frac{\partial}{\partial z} \text{ div } b - \nabla^2 b_3 \right]$$

$$= \nabla \text{ div } b - \nabla^2 b$$

Damit ist auch $\nabla^2 b$ definiert.

Jetzt kehren wir zurück zum früheren Gegenstande

$a = -\nabla P$ also kann man a ausrechnen wenn P gegeben ist

wenn dagegen a gegeben ist, so $P = \int\limits^{r} \nabla a \, dr$

Man kann aber auch für P einen andern Ausdruck finden indem

man $\operatorname{div} a = \nabla^2 P$ auflöst

wenn nämlich div a = Quellenstärke gegeben ist $= \rho$ scalare Dichtigkeit,

das zugehörige P zu finden

$-\nabla^2 P = \rho = f(xyz)$ ρ = Quellenintensität

Wenn man nun ρ zerlegt in $= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$ ~~und~~ so dementsprechend

auch $-\nabla^2 P_1 = \rho_1$ $-\nabla^2 P_2 = \rho_2$ $-\nabla^2 P_3 = \rho_3$ etc

So wird auch $P = P_1 + P_2 + P_3 \ldots$ weil alle Gleichungen linear sind

und ebenso $a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ wenn $\operatorname{div} a_1 = \rho_1$ $\operatorname{div} a_2 = \rho_2$

Also kann man das Potential welches ~~aus~~ durch einer Summe von Quellen bewirkt wird, und die entsprechende a Bewegung auch ~~durch~~ als Summe der Einzel P und Einzel a gewinnen welche jeden ρ_1 entsprechen

Also zerlegen wir die in Raume enthaltenen ρ und betrachten nur die ρ eines gewissen Volumelementes

Was wird das dementsprechende a sein?

a ist überall im Raume symmetrisch, also auf Kugelfläche mit Radius r gleichförmig verteilt

$4\pi a_0 r^2 = \rho \, dv$ $\quad a_0 = \frac{\rho \, dv}{4\pi r^2}$ oder: $a = \frac{\rho \, dv \, r}{4\pi r_0^3}$

Das entsprechende P?

Am besten aus Linienintegral

$$P - P_0 = \int_\infty^0 \mathfrak{a}\, ds$$ wenn wir als P_0 den Werth im ∞ annehmen $= 0$

$$P = \int_0^\infty \mathfrak{a}\, dr =$$

weil hier die beiden Comp. a und dr zusammenfallen wird es ein gewöhnliches

$$= \frac{q}{4\pi}\int a_0\, dr_0 = \frac{q\,dv}{4\pi}\int \frac{dr_0}{r_0^2} = -\frac{q\,dv}{4\pi}\,\frac{1}{r}\Big|^\infty = \frac{q\,dv}{4\pi r}$$

Also haben wir sowohl das a als auch das P welches einem gewissen $q\,dv$ entspricht, somit das ganze P und a = Summe

$$P = \int q\,\frac{dv}{4\pi r} \qquad a = \int q\,\frac{dv\; r}{4\pi r_0^3}$$

bekannte gewöhnliche Form der Pot. Gleichg $\quad \nabla^2 P = -q$

oder wenn man $\frac{q}{4\pi} = \rho$ setzt: $\quad P = \int \rho\,\frac{dv}{r} \qquad \nabla^2 P = -4\pi\rho$

wir können das auch so schreiben: $P = \text{pot}\; q$

$$P = \text{pot.}\; \nabla^2 P$$

∇^2 und pot sind inverse Operationen

Natürlich können im Allgem wenn P im $\infty \gtrless 0$ wäre noch Integrations Constanten dazukommen.

Wenn also irgend eine der drei Größen P, a, q gegeben ist so können wir jetzt die beiden anderen daraus ausrechnen.

Sonst lernt man den Begriff des Potentials gewöhnlich in der Gravitation oder Electr. Lehre zuerst kennen, dann pflegt man sehr erstaunt zu sein, dass in der Hydrodynamik dasselbe wiederkommt.

Das beruht eben darauf dass diese Sätze eigentlich ganz allgemein geometrischer Natur sind. P sind eigentlich bloss mathematische Hilfsgrößen.

In Hydromech. bedeutet ϱ Quellenstärke, a Flüssigkeitsgeschwindigkt.

In ~~Elect~~ Gravitation ϱ resp. ϱ Massendichte a Kraft

Electr. .. Electr. dichte

Magnet. Massen etc.

..

~~Dies tritt ... ~~ Man braucht eigentlich nicht den Umweg über P zu machen um a aus ϱ zu berechnen aber

Der Nutzen des P besteht darin dass es eine rein scalare Function ist welche im Allgemeinen viel leichter zu berechnen ist. ~~..~~

Natürlich braucht man nicht dem ϱ oder dem P eine reale Existenz zuzuschreiben. Bei Gravitation hat dies noch einen gewissen Schein von Berechtigung an sich denn es zeigt sich dass dort ϱ im Allgem nur dort ≥ 0 ist, wo sichtbare Massen sich befinden, also scheint es naheliegend diese gewissermaßen als Ursache aufzufassen, obwohl das kaum hinreichend berechtigt ist. Bei Electr. Lehre dagegen ist ~~..~~ ein solcher Grund nicht vorhanden; ~~..~~ in der alten Electr. Lehre sind die Electr. und Magn. Massen als das objektiv existirende Agens angesehen worden und die Kräfte nur als ihre Function, Wirkg. ~~..~~

In der neueren Theorie hat man diesen Standpunkt aufgegeben. Elektr. Masse sieht man ebenso als Rechungs Ausdruck an, wie Pots. Gedanken von Ursache Wirkung etc. kommen da überhaupt nicht vor. Manchmal ist es bequem ~~..~~ auf ϱ zurückzugehen, meistens operirt man aber direkt mit der Elektr. Kraft welche ja bis zu einem gewissen Grade physikalisch messbar ist.

Alles dies nur wenn curl $=0$; was nun wenn dies nicht der Fall ist? Da werden wir wieder einen Spezialfall betrachten nämlich div $=0$ curl $\gtrless 0$, da es sich zeigen wird, dass man überhaupt jedes Feld als Übereinanderlagerung zweier solcher Felder auffassen kann

---

In voriger Stunde haben wir Vorzeichen nicht näher beachtet
Wir hatten abgeleitet:

$$a = \nabla P$$

$$P = \int \frac{\operatorname{div} a}{r}\, dv$$

$$\operatorname{div} a = \nabla^2 P$$

es ist nun in der Physik üblich den entgegengesetzten Werth $-P$ als Potential aufzufassen

Der Grund ist folgender: Wenn $P =$ mechanisches Potential
$a =$ " Kraft

so ist ~~$m\, \dot{r}^2$~~ $m\ddot{r} = \nabla P$

$$m \frac{\dot{r}^2}{2}\Big|_1^2 = \int \nabla P \, dr = P\Big|_1^2$$

$$m\frac{\dot{r}^2}{2}\Big|_2 - P_2 = \text{constant}$$

Da wäre also die Differenz

zwischen L K und pot. Energie constant; da es uns aber besser zusagt die potentielle Energie auch als eine L K aufzufassen, welche an sich > 0 ist, so geben wir dem P das – Zeichen, oder fassen –P als Potential auf, damit wir sagen können: die Summe der L K und der pot. En. ist constant dann ist also:

$a = -\nabla P$ $\qquad a = -\nabla \int \frac{q}{r} dv = \int \frac{q\,r}{r^3} dv = f$

$\operatorname{div} a = -\nabla^2 P = q$

$P = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} a}{r_0} dv = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q}{r_0} dv$

Laplace'sche Form: $\nabla^2 P = -4\pi \rho$

$P = \int \frac{\rho}{r_0} dv$

Jetzt gehen wir zu dem zweiten Hauptfall über, wo $\operatorname{div} = 0$ $\quad \operatorname{curl} \gtrless 0$

a kann nicht dargestellt werden als ∇P denn dann ist $\operatorname{curl} = 0$

div denn dies wäre ein scalar,

also bleibt nur curl übrig.

Probiren also ob

$a = \operatorname{curl} b$ gesetzt werden kann, wenn curl a beliebig gegeben ist.

$\operatorname{div} a = 0$ stimmt

$\operatorname{curl} a = \operatorname{curl}^2 b = \nabla \operatorname{div} b - \nabla^2 b = c$ | Wir wählen aber die einfachste Art von b so dass $\operatorname{div} b = 0$

$\nabla^2 b = -c$

Dies ist aber ja die gewöhnliche Potentialgleichung

$$\nabla^2 b = i\nabla^2 b_1 + j\nabla^2 b_2 + k\nabla^2 b_3 = -(ic_1 + jc_2 + kc_3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla^2 b_1 = -c_1 & b_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c_1}{r_0}\,dv \\ \nabla^2 b_2 = -c_2 & \cdot\ - \\ \nabla^2 b_3 = -c_3 & - \end{array}\right\} \quad b = ib_1 + jb_2 + kb_3 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{ic_1 + jc_2 + kc_3}{r_0}\,dv$$

$$b = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c}{r_0}\,dv$$

$$b = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{curl}\,a}{r_0}\,dv$$

$$a = \text{curl}\left\{\frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{curl}\,a}{r_0}\,dv\right\}$$

b nennt man das Vector Potential von a

Falls also curl ≷ 0 div = 0 so kann jede solche Function durch die Operation curl von einem Vectorpotential abgeleitet werden.

~~div~~ curl $a = 0$	div $a = 0$
Quelle $q = \text{div}\,a$	Wirbel $c = \text{curl}\,a$
$P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{q}{r_0}\,dv$	$b = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c}{r_0}\,dv$
$a = \nabla P$	$a = \text{curl}\,b$
$q = -\nabla^2 P$	$c = \text{curl}^2\,b$

Auf einen Punkt muss ich aber *jetzt* hier noch genauer *näher* eingehen, nämlich die Frage der eventuellen Integrations Constanten.

Wenn Pot. gegeben ist, so *kann man* ohne weiteres davon a bilden, und daraus wieder div a oder curl a. Bei dem umgekehrten Wege dagegen tritt die Frage auf, ob man zu diesen Potentialen nicht noch Functionen zufügen muss welche den Integrationsconstanten bei gewöhnlicher Integration entsprechen.

Eine solche *Vector-*Function a müsste sowohl div a = 0, curl a = 0 haben

daraus folgt aber noch nicht dass sie selbst = 0 ist; eine jede Constante würde den Gl. genügen

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}: \quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = 0$$

Also $\nabla^2 a_1 = 0 \quad \nabla^2 a_2 = 0 \quad \nabla^2 a_3 = 0$ wie ohne weiteres folgt aus $\mathrm{curl}^2 a = 0$

Ebenso eine ~~[illegible]~~ analoge Scalargrösse A wenn $\nabla^2 A = 0$

Also können zu unseren Potentialen eigentlich noch Functionen dazugefügt werden welche dieser Laplace'schen Gleichung genügen.

Aber nur unter der Bedingung, dass den Grenzbedingungen genüge geleistet wird.

Solche Functionen beschäftigt man sich in der Physik ganz massenhaft

z.B. Gravitationsfeld zwischen Sonne und Erde etc.

Electrostatischen Felder etc.

Wir würden damit auch fortwährend zu thun haben, falls wir begrenzte physikalische Felder in Betracht ziehen würden. Wir erstrecken aber im Allgemeinen jene Integrationen über den ganzen unendlichen Raum und dabei fallen diese Functionen meistens weg. Dies folgt aus einem Satz der Potentialtheorie, den ich jetzt wohl als bekannt voraussetzen darf: übrigens später noch einmal beweisen

Ist eine Function welche der (Potentialgleichung genügt) auf einer geschlossenen Oberfläche im Inneren des Raumes constant, so ist sie überhaupt in dem ganzen betrachteten Raume constant.

Also wenn sie z.B. $= 0$ ist, so ist sie im Inneren überall gleich Null

Man sieht ein: würde das Potential wachsen ins Innere hinein so müsste es irgendwo ein Maximum besitzen dann wäre aber eben die Kraft von diesem Punkten überall nach aussen gerichtet daher könnte $\operatorname{div} a$ nicht $= 0$ sein. Es müsste an der betreffenden Stelle eine Masse vorhanden sein, was aber der Voraussetzung der Gleichung $\nabla^2 = 0$ widerspricht

Wenn wir jetzt diese geschlossene Fläche ins ∞ verlegen, so erhalten wir den Satz: eine Function welche im Unendlichen überall $=0$ ist und überall der Gleichung $\nabla^2 a = 0$ resp $\nabla^2 A = 0$ genügt, ist überall $=0$.

Im Allgemeinen werden wir aber nur solche Kräfte etc. betrachten welche ~~nicht nur~~ in unendlicher Entfernung verschwindend klein werden, daher werden wir diese Functionen im Allgemeinen nicht zu berücksichtigen brauchen. In speciellen Fällen z.B. in der Electrostatik werden wir übrigens noch näher darauf zu sprechen kommen.

~~Im Allgemeinen~~ Wir haben bisher also 3 specielle Arten von Vector-Functionen kennen gelernt:

$$\text{div} = 0 \qquad \text{curl} = 0 \qquad \begin{matrix}\text{div}\\ \text{curl}\end{matrix} = 0$$

Jetzt wollen wir einen äusserst interessanten Satz beweisen, dass man nämlich jede räumliche Vectorfunction aus solchen Functionen zusammengesetzt denken kann.

$$f = g + h \quad = -\nabla P + \text{curl}\, b$$

$$\text{div}\, f = -\nabla^2 P \qquad\qquad P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{div}\, f}{r_0}\, dv$$

$$\text{curl}\, f = \text{curl}^2 b = -\nabla^2 b$$

$$b = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{curl}\, f}{r_0}\, dv$$

~~Aber~~ Dazu kommt eventuell noch eine Funktion der früher besprochenen Art ∇A wo $\nabla^2 A = 0$, die können wir uns aber mit dem P vereinigt denken.

Also wir ganz beliebige Funktionen aufzufassen als Abgeleitete aus zwei Arten von Potentialen. Das Merkwürdige dass sie nach derselben Art gebildet sind: das scalare als ob Newton'sche Gravitationskräfte wirken würden, und analog auch das Vectorielle. Man könnte somit ein ganz beliebiges Kraftfeld ~~[illegible]~~ auf Newton'sche Kräfte zurückführen, dagegen wäre es nicht möglich dasselbe etwa auf Kräfte von der Form $\frac{1}{r^3}$ zurückzuführen, wo dann im Nenner des Potential Ausdruckes $\frac{1}{r^2}$ stehen würde. Wir sehen dagegen dass es einen guten Grund hat, wenn in der Physik gerade die Gesetze $\frac{1}{r^2}$ so vorherrschen; das liegt eben darin dass die Flächen zweidimensional, der Raum dreidimensional ist. Natürlich will ich damit nicht gesagt haben, dass ich etwa das Gravitationsgesetz für „a priori" evident halte. Es ist allerdings richtig dass ich auf jeden Fall sagen könnte das Gravitationsfeld müsste sich auf „fingierte Newton'sche Massen" zurückführen lassen, wenn ich auch gar nichts aus der Erfahrung weiss, als dass diese fingierten

Massen gerade sich dort befinden, wo ich thatsächlich Körper sehe und fühle ist das Merkwürdige, und noch Merkwürdiger, dass sie den Trägheitsmassen genau proportional sind. Wahrscheinlich gilt ja das Newton'sche Gesetz nicht genau; dass es aber so annähernd gilt, ~~dass~~ insbesondere dass Gravitationsmasse = Trägheitsmasse das ist der merkwürdige noch nicht erklärte Umstand.

Bei Electricität ist dies nicht mehr der Fall, da sehen und fühlen wir die electrischen Massen nicht, wir brauchen sie auch nicht zur Erklärung der Trägheit, es sind eben rein „fingirte Massen", welche mit keiner anderen Erscheinung in Zusammenhang stehen, ausser vielleicht mit der Electrolyse. Das ist der einzige Umstand welcher noch dafür spricht, dass nämlich die electrischen mit den chemischen Äquivalenten in so naher Beziehung stehen, sonst würde der Begriff electr. Masse überhaupt schon aufzugeben.

Die beiden Bestandtheile curl und V sind zu einem großen Theil von einander unabhängig und zeigen sehr verschiedene Eigenschaften

$$a = \nabla \int \frac{1}{4\pi} \frac{\operatorname{div} a}{r_0}\, dv + \operatorname{curl} \int \frac{\operatorname{curl} a}{4\pi r_0}\, dv$$

Construierbar falls div und curl gegeben sind, $+ A$

Physikalisch ganz verschieden

Kraftlinien entweder endlich oder unendlich oder geschlossen

Beispiele

Gravitation

Wärmeleitung & Diffusion $\quad c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} a$

$$a = k \nabla \theta \qquad + \operatorname{curl} ?$$

Hydromechanik

Electricität. Heaviside hat dies besonders klargelegt wie sich diese beiden Bestandtheile unterscheiden.

$$\left.\begin{aligned} K \frac{\partial e}{\partial t} + L(e - e') &= \operatorname{curl} h \\ \mu \frac{\partial h}{\partial t} &= - \operatorname{curl} e \end{aligned}\right\} \text{ Zuletzt} = \text{Hertz}$$

h wirbelartig; e wirbelfrei = electrost., wirbelartig = indu. electrische

Übersicht über Theorien : Electrost.

$f = -\frac{m m'}{r^2}$ $\quad$ Dann Dielectricitätsconst; scheinbare Ladg.

Ebenso Magnetismus ; soweit gar kein Zusammenhang

$$\frac{m\, i\, ds \sin \varepsilon}{r^2} \qquad \frac{i i' ds\, ds'}{r^2}\left(\frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' - \cos \varepsilon\right) \qquad i i' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

Dagegen Stefan. Potentiale von Kein Zusammenhang untereinander

ob Reibungselectr. magnet. Wirkungen ausübt.

Weber: $f = \frac{m m'}{r^2}\left(1 - a^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2 r}{dt^2}\right)$ $\quad$ Dagegen Maxwell

kein $\frac{1}{r^2}$ kein m, aber doch daraus ableiten; Sind Diff Gleichgn wie Wärmeleitg etc.

$\frac{\partial}{\partial t}$; kein Fernwirkung // Auch Mängel: Variabilität von μ; nur für Ruhe genau; formell

Das wichtigste Ergebnis unserer letzten Untersuchung, welches ich jetzt noch kurz wiederholen will, war also: ~~dass~~ Eine beliebige Vectorfunction lässt sich immer in zwei Bestandtheil zerlegen, einen wirbelfreien und einen quellenfreien, die von einem scalaren und einem Vectorpotential abgeleitet werden können

$$a = \nabla \int \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} a \, dv + \operatorname{curl} \int \frac{\operatorname{curl} a}{4\pi} \, dv$$

Man kann den Satz auch so aussprechen: Falls div a und curl a für jeden Punkt des Raumes gegeben sind kann man das dazugehörige a selbst construieren. Eine Unbestimmtheit liegt nur noch darin, dass eventuell eine Function A hinzugefügt werden muss, welche $\nabla^2 A = 0$ genügt. Den Wert dieser Function wird ~~[illegible]~~ sich bestimmen lassen, falls die Werthe von a an einer fern geschlossenen Oberfläche also die Grenzwerthe gegeben sind. Wir werden im Allgemeinen die Integration über den ganzen unendlichen Raum erstrecken, ~~[illegible]~~ und mit Functionen operieren, die sich nicht bis ins ∞ erstrecken, dann ist $A = 0$ wie ich letzten Mal, schon erwähnt habe.

Die Wichtigkeit dieser Zerlegung liegt nun darin, dass bei den physikalischen Functionen die beiden Bestandtheile schon zufolge dieser blos geometrischen Eigenschaft der Wirbelfreiheit resp. Quellenfreiheit, ein ganz verschiedenes physikalisches Verhalten zeigen, und die Eintheilung nach dieser Eigenschaft ist deshalb von grundlegender Bedeutung für die Physik.

Ein Mittel, wie man sich diesen Unterschied veranschaulichen kann, habe ich schon letztes Mal besprochen: Kraftlinien resp. Stromlinien

~~Also~~ Man zieht sich Linien, welche überall in der Richtung des Vectors a verlaufen, und zwar so viel Linien dass ihre Anzahl ~~pro~~ Flächeneinheit proportional ist dem

$\frac{2}{17}$ Tensor von a. Falls Fläche gewußt, so Anzahl groß ∞ und auch Kraft prop. ∞.

Natürlich ist dies bloß ein ziemlich rohes Veranschaulichungsmittel, zerschon[?]

bietet sich dies nicht weil man sich die Sache räumlich vorstellen muss, und

eigentlich müsste eine unendlich große Anzahl von Linien gezogen werden, um

den unendlich kleinen Abstufungen in der Größe von a gerecht zu werden.

Diese Linien müssen nun entweder Anfangs- und Endpunkt haben, dann

ist dort div a > 0 Quelle div a < 0 Senke; oder sie sind in sich geschlossen

oder sie kommen aus dem ∞ und gehen ins ∞, letzteren wollen wir ausschließen;

den geschlossenen entspricht ein endlicher Wert des curl.

Wirbelfreies Feld

div endlich

curl = 0

div = 0 curl endlich

unmittelbar ersichtlich

Dass curl endlich, sieht man aus Stokes Satz

$\oint a\, dr = \iint \text{curl}_a N\, dF$ — wenigstens an einer Stelle

endlicher Wert — also muss auch curl endlich sein

(ebenso umgekehrt wenn curl = 0 wäre so könnten keine geschl. Linien sein.)

Endlich auch gemischte Felder wo beide Arten vorkommen, dann obige Vertheilung

Es gibt nun physikalische Funktionen welche nur dem einen Typus angehören

oder welche beide Arten vereinigen

Das Gravitations-Feld ganz ersten Typus allerdings dabei eine Schwierigkeit,

weshalb ich hier die Gravitation nicht als Beispiel anführen sollte, denn die

Gravitationsfelder reichen ins Unendliche.

$\lim_{r=\infty}(a r^2)$ bleibt endlich, daher eigentlich hier ausgeschlossen.

Sie bieten ja das Notwendige, dass man nur positive Gravitation nur kennt, also nur positive Divergenz.

Dagegen electrost. Felder.

Wärmeleitung und Diffusion

Dabei messen wir nur Div des Wärmestromes, ob ein curl existiert wissen wir gar nicht

$$a = \kappa \nabla \theta$$
$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} a$$

~~[illegible]~~ es wäre möglich, dass man zu a noch ein Glied curl b hinzufügen muss, das könnten wir gar nicht entscheiden mit unseren heutigen Mitteln, weil wir a eben nur nach seiner Divergenz beurtheilen.

Hydromechanik

Strenge Theilung in zwei Bewegungsarten; wirbelfrei ... geschwindigkeits Potential und Wirbelbewegungen, welche von Helmholtz eingeführt worden ist.

Darauf kommen wir noch zu sprechen bei Hydromech. Wichtigkeit schon durch den einen Satz einleuchtend: eine Wirbelbeweg. einer incompr. Flüssigkeit kann nie durch conservative Kräfte hervorgerufen werden; ~~alsdann von~~ besteht sie aber einmal, in der sie durch Kräfte erzeugt worden ist, welche kein Geschw. Pot. haben, so dauert sie ewig, kann wieder nicht durch conserv. Kräfte vernichtet werden. Da sind im Allgemeinen beide Arten von a vertreten.

4/7

Noch schärfer eingreifend ist aber der Unterschied in der Electricität. Hier sind beide Klassen von Erscheinungen scharf geschieden, und auf diese Unterscheidung ist eigentlich die ganze Maxwell-~~Heaviside~~sche Electricitätstheorie basirt. Es ist jedenfalls Heavisides Verdienst, dessen ~~diesen~~ Punkt ins klare Licht gestellt ~~zu haben~~ hat und damit den absonderlichen alten Potentialtheorien Theorien von Doppelbelegungen u. s. w. den Garaus gemacht hat.

Schreibt man die Maxwellschen Electricitätsgleichungen in unserer Bezeichnungsweise so werden sie ziemlich einfach.

Mit e wollen wir die electrische Kraft, also die Kraft, welche im electrischen Felde wirkt, bezeichnen, mit h die magnetische Kraft.

Ausserdem ~~Constanten~~ K = Dielectricitätsconstante

μ = Magnetische Permeabilität

L = Leitfähigkeit

$$\begin{cases} K \dfrac{\partial e}{\partial t} + L(e - e') = \operatorname{curl} h \\ \mu \dfrac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{curl} e \end{cases}$$

Wenn noch äussere electromot. und magnetische Kräfte wirken so kommt in noch dazu: $-h'$, $-e'$

Zerlegt man das in die Componenten so erhält man zwei Systeme von je 3 Gleichungen

$$K \frac{\partial e_1}{\partial t} + L e_1 = \frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z} \qquad \mu \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial e_2}{\partial z} - \frac{\partial e_3}{\partial y}$$

$$K \frac{\partial e_2}{\partial t} + L e_2 = \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_3}{\partial x} \qquad \mu \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial e_3}{\partial x} - \frac{\partial e_1}{\partial z}$$

$$K \frac{\partial e_3}{\partial t} + L e_3 = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \qquad \mu \frac{\partial h_3}{\partial t} = \frac{\partial e_1}{\partial y} - \frac{\partial e_2}{\partial x}$$

Dies sind bis auf die Bezeichnungsweise der Constanten etc. genau dieselben Gleichungen wie sie Hertz als Grundgleichungen der Electrodynamik aufgestellt hat, und es war ja in der That das Verdienst der theoretischen Arbeit von ~~Hertz~~ bloss, dass er die Maxwell-Heaviside'schen Formeln in die Cartesische Form ~~Algebra~~ umgesetzt und den Deutschen mundgerecht gemacht hat.

Man sieht nun aus der zweiten Gleichung, wenn h nicht schon einmal divergent vertheilt ist; so wird es immer nur wirbelartig vertheilt bleiben. In der That wird es als Charakteristicum der magnetischen Kraft angeben, dass sie immer quellenfrei vertheilt ist, dass überall $\text{div}\, h = 0$, es gibt keine wahren magnetischen Massen, (wo man sie eventuell einführt in der Physik da sind es bloße Rechnungsbehelfe).

Bei e ist es anders; wäre die Leitfähigkeit überall $= 0$, so könnte auch hier kein div entstehen, da in einem vollkommenen Dielectricum könnten keine electrischen Ladungen entstehen. Da es aber electrische Leiter gibt, so ist dies nicht der Fall, es werden im allgemeinen auch electr. Ladungen entstehen können, also e wird theils divergent, theils wirbelhaft vertheilt sein.

Diese Kräfte sind nun einigermaßen verschieden; das was mit div zusammenhängt wurde als electrostatische Kraft bezeichnet, dagegen das was früher als inducierte electromotorische Kraft zusammenhängt

Das ist gerade der Bestandtheil von e welcher einen curl hat.

Bevor wir nun näher darauf eingehen ist es nützlich sich den Unterschied zwischen der Maxwell'schen Theorie und der älteren Theorie klar zu machen. Eigentlich kann man gar nicht sagen der älteren Theorie sondern der älteren Theorien, denn das was mit diesem Namen bezeichnet wird, und das leider auch noch immer den Grundstock dessen bildet was über Electricität in Gymnasien etc. gelehrt wird, ist ein bloßes zusammenhangloses Aggregat von verschiedenen Theorien, das der historischen Entwicklung der Electricitätslehre sein Wesen verdankt, aber durchaus nicht innerlich consequent durchgearbeitet ist.

Zuerst wurde von Coulomb, Gauss, Cavendish u. a. die Erscheinungen der Reibungselectricität näher untersucht und die Gesetze mathematisch formulirt. Da man dabei nur mit ungemein geringen Electricitätsquantitäten operiren konnte, musste man sich bei den Experimenten immer auf Electrostatik beschränken; es zeigte sich dass man diese durch das Coulomb'sche Gesetz

$$f = \frac{m\,m'}{r^2}$$

genügend beschreiben kann, eingehend in mathem. Consequenz verfolgt. Später kam dazu die Dielectricitätsconstante, noch später fand man dass auch auf die Grenzfläche von Medien mit verschiedenen K eine Kraft ausgeübt wird. Man erfand den Begriff der scheinbaren Ladung. Hypothese von Poisson-Mosotti.

Ganz analog entwickelte sich gleichzeitig die Lehre vom Magnetismus, auch sie wurde auf ein analoges Gesetz aufgebaut $f = -\frac{m m'}{r^2}$.

Soweit schienen diese beiden Erscheinungen, Electricität und Magnetismus von einander überhaupt unabhängig zu sein. Man faßte sie als eigene Klassen von physikalischen Phänomenen auf.

Da kamen die Entdeckungen des Einflusses eines galvanischen Stromes auf die Magnetnadel von Örsted, dann die diesbezüglichen Untersuchungen von Biot und Savart, von Ampère; endlich die inversen Erscheinungen die Erzeugung galvanischer Ströme durch Veränderung von Magneten und durch Induction seitens anderer Stromkreise von Faraday.

Dadurch wurde die sogenannte galvanische Electricität in den Vordergrund des Interesses gerückt d.h. die geschlossenen Ströme wie sie in Leitern entstehen. Jedes dieser Gebiete wurde eifrig durchforscht und für jede Wirkung die entsprechenden Gesetze aufgestellt.

So stellten Biot und Savart das Gesetz auf für die ponderomotorische Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnet Pol $\frac{m\, i\, ds}{r^2} \sin \varepsilon$

Ampère das Gesetz der ponderomot. Wirkung zwischen zwei Stromelementen ~~ist bei~~

$$\frac{i\, i'\, ds\, ds'}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta' - \cos\varepsilon\right]$$

Dann kamen die Gesetze für die electromotorische Kraft welche durch Bewegung oder ~~durch~~ Änderung des magnetischen Feldes hervorgebracht wird

8/17

So hing die electromotorische Kraft welche in einem geschlossenen Stromkreis inducirt wurde, von dem Werthe des Integrals $\iint \frac{\cos\varepsilon}{r^2}\,ds\,ds'$ ab.

~~Allerdings~~ Indessen fanden wieder andere Forscher andere Elementargesetze, so zeigte Stefan, dass man nicht nöthig habe das Ampère'sche Gesetz in jener Form anzunehmen, es lassen sich eine Menge anderer Gesetze finden, welche ganz dieselben Resultate ergeben würden. Mathematisch wurde dieses Kapitel sehr ausgebildet, es wimmelte da von den verschiedensten Potentialen, Doppelbelegungen u.s.w., aber man suchte immer alles ~~[illegible]~~ auf scalare Potentiale zurückzuführen. Untereinander waren diese Erscheinungen aber gar nicht gehörig verbunden, man musste eben unterscheiden, ob man es mit electrostatischen Feldern, mit Strömen, mit veränderlichen Strömen, mit bewegten Magneten etc. zu thun hatte und darnach die einen oder anderen Gleichungen anwenden. Das zeigt sich am besten darin, dass es lange ~~Zeit~~ eine Streitfrage war, ob Reibungselectricität überhaupt magnetische Wirkungen ausüben könne. M. Condensator

Wenn dies nicht der Fall gewesen wäre so hätte man ja gar nicht das Recht gehabt, diese auch Electricität zu nennen. Mit unseren heutigen Hilfsmitteln ist natürlich ein Leichtes zu zeigen, dass dies thatsächlich stattfindet.

Es fehlte also eine zusammenfassende Theorie der electro-magnetischen Erscheinungen. Versucht wurde es allerdings eine solche aufzustellen. Der bekannteste und vielleicht interessanteste Versuch ist wohl jener von Weber

Kraftgesetz ~~$K = \frac{m m'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$~~ $\quad f = \frac{1}{r^2} - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2a^2}{r}\frac{d^2r}{dt^2}$

Sie sehen auch hier führt er alles auf die ~~geht er noch von den~~ fingierten electrischen Massen zurück, und sucht die Sache möglichst den scalaren Gravitations Potential anzupassen. Es würde zu weit führen wenn ich auf eine Kritik des Weberischen Gesetzes eingehen würde. Helmholtz machte gewichtige Gegengründe vor, welche sich auf das Princip der Erh. d. Energie stützen; heute ist es schon ganz vergessen, da die Hertz'schen Versuche sämmtliche diese Theorien vernichtet haben, da keine die Existenz von Electrischen Wellen genügend erklärt ausser eben der Maxwell'schen.

Diese ist also der erste Versuch einer zusammenfassenden Theorie sämmtlicher electromagnetischen Erscheinungen, die Hertz'schen Wellen inbegriffen, und bildet jedenfalls einen ungeheuren Fortschritt gegen die früheren Theorien und ist jedenfalls viel natürlicher, ungezwungener, enthält weniger hypothetisches als jene. Diese zwei Gleichungen treten da an Stelle jener verschiedenartigen Elementargesetze, und jene lassen sich rein deductiv daraus ableiten — für gewisse Fälle nämlich, wo sie richtig sind.

Sie sehen, dass das Newton'sche, resp. Coulomb'sche Gesetz darin nicht vorkommt, der ominöse r^2 im Nenner ist nirgends enthalten.

10/17

ebenso sind keine elektrischen Massen drinnen vorhanden und keine magnetischen Massen, und trotzdem werden sich jene elektrostat. Gesetze daraus ableiten lassen.

Der hauptsächlichste Unterschied dieser Gleichungen gegen jene ist der, dass dies Differentialgleichungen sind, welche für jeden Punkt des Raumes giltig sind, jene aber eine Art von Integralgleichungen.

Sie sind also in dieser Beziehung der Grundgleichung der Wärmelehre

$$c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \vartheta$$

oder den hydrodynamischen Gleichungen analog.

Auch insofern als hierin die zeitliche Veränderung des Zustandes $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ abhängig gemacht wird von den Zuständen welche in einem bestimmten Augenblicke vorhanden sind. Ist die Vertheilung eines Vectors zu einer gewissen Zeit gegeben, so ist durch die Gleichung die weitere Veränderung desselben schon gegeben, das ist der allgemeine Typus der physikalischen Gleichungssysteme (mit Ausnahme solcher welche sich auf stationäre Zustände beziehen.) Dass die Veränderlichkeit an einem Punkte nur von dem Zustande in der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängig gemacht wird, pflegt man auch so auszudrücken, dass man sagt: die Wirkung ist nicht eine actio in distans, wie bei obigen Gesetzen, wo der Zustand an jedem Punkte definirt ist durch die Zustände im ganzen unendlichen Raum, sondern eine Wirkung von Volumelement zu Volumelement also durch Vermittlung des Mediums.

Das ist allerdings schon mehr behauptet, als in den Gleichungen drinnen steckt; Maxwell hat zwar gewiss diese Meinung gehabt dass Fernwirkungen unmöglich sind, – ebenso wie auch Newton derselben Ansicht war – aber in den Gleichungen ist das nicht ausgedrückt, man kann ja jede Integralgleichung in Differentialgleichungen umwandeln und umgekehrt.

Vollkommen tadellos ist nun auch die Maxwell'sche Theorie durchaus nicht, und es ist sicher dass sie nicht der Abschluss sondern der erste Schritt zu einer richtigen Electricitätstheorie ist. So möchte ich bemerken, dass man gerade bei Anwendung auf die stark magnetischen Substanzen wie Eisen, Stahl etc. sehr vorsichtig sein muss, denn das μ ist hier als Constante vorausgesetzt während es in Wirklichkeit bei diesen Stoffen von der Feldintensität selbst noch abhängt. Dazu kommen die Erscheinungen der Hysteresis und des remanenten Magnetismus, die darin nicht berücksichtigt sind. Also werden die Gleichungen diesbezüglich mit der Zeit noch modificirt werden müssen. Vielleicht existirt auch eine dielectrische Hysteresis?

Ferner: die Gleichungen gelten eigentlich nur für ruhende Körper, man kann sie mit gewissen Modificationen auch auf bewegte Körper übertragen, aber wenn einmal die Bewegungsgeschwindigkeit von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit wird, dann wissen wir gar nicht mehr was dann geschieht, inwieweit die Gleichungen brauchbar bleiben etc.

Um diese Frage zu entscheiden fehlen uns vor Allem noch die experimentellen Daten. Voraussichtlich wird da aber bald ein Fortschritt gemacht werden, indem ja jetzt die Frage inwiefern der Lichtäther an der Bewegung der Körper Antheil nimmt, in Fluss gebracht worden ist, und zahlreiche Untersuchungen darüber neuerdings angestellt werden, und dies hängt mit diesen Fragen aufs Innigste zusammen.

Endlich sind die Gleichungen auch in formeller Beziehung etwas unklar, indem das e und h eigentlich nicht direct messbar sind, und es wäre besser wenn man Grössen hineinbringen würde, die direct gemessen werden können.

Ich bin nun eigentlich in Verlegenheit wie ich diese Gleichungen ableiten
denn direkt aus Versuchen abzuleiten scheint nicht gut möglich zu sein.
soll. Es sind da verschiedene Methoden gebräuchlich:

1) Historische Methode (Maxwell, Lang) Die früheren Gleichungen so umformen dass schliesslich diese herauskommt; hat Nachtheil, dass man von unrichtigen oder theilweise unrichtigen Voraussetzungen ausgeht und zu richtigen Schlüssen kommt. Recht nicht so Unterschied hinein kommt. Dagegen Vortheil leichter

2). Als Specialfall cyklischer Systeme (Maxwell, Boltzmann). Sehr elegant aber enthält natürlich auch Hypothetisches. Zu Weitläufig.

3). Einfach aufstellen und dadurch beweisen dass Folgerungen richtig sind (Hertz und theilweise auch Heaviside). Letzterer betont auch hauptsächlich Parallelismus der electr. und magnet. Erscheinungen. Allerdings weiss man nicht ob es nicht vielleicht andere Gleichungssysteme geben würde, welche auch dieselben Consequenzen zulassen. Bei Hertzischen Gleichungen wäre dies gewiss abschreckend, da man die Bedeutung derselben gar nicht überblicken kann, hier wo wir von curl etc. schon etwas anschaulichere Begriffe haben wird dies nicht so schwer sein. Will versuchen, dies nur einigermassen plausibel zu machen.

$$K \frac{de}{dt} + 4\pi L (e - e') = \text{curl}\, h$$

$$\mu \frac{dh}{dt} = -\,\text{curl}\, e$$

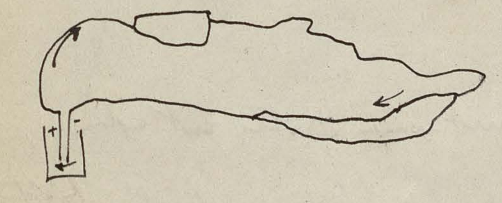
Wie schon früher gesagt, kann man diese Gleichungen nicht direct aus den Versuchen herleiten, sondern ihre Begründung besteht darin, dass die Folgerungen, die daraus gezogen werden, sich als richtig erweisen.

Doch plausibel kann man diese Gleichungen machen:

Hypothesen:

1). Es gibt nur geschlossene elektrische Ströme.

Bei stationärer Strömung in Leitern ist das ja ein bekannter Erfahrungssatz, welcher auch in der alten Theorie stillschweigend angenommen wird



Ebenso in Platten, Raumkörpern

Als Beweis des Stroms können wir ein Voltameter benutzen. Wenn man irgendwo dasselbe einschaltet wird es überall gleichen Strom anzeigen.

Das gilt aber nur für metallische Leiter.

Wie nun in Dielectricis. Fortwährender Strom ist da nicht möglich.

Maxwell's Theorie ist nun, dass die sogenannten Verschiebungsströme mit den Leitungsströmen (wenigstens in Bezug auf magnetische Wirkung) ganz äquivalent sind, sich also zu denselben einfach addieren. Unter Verschiebungsstrom versteht man dabei die Änderung der dielectrischen Verschiebung mit der Zeit, oder wie man auch zu sagen pflegt der dielectrischen Polarisation. Ein directer experimenteller Beweis lässt sich

auch dafür nicht gut geben. Aber plausibel d. unter Annahme der Fluidums Theorie. Dann kann man sich vorstellen, dass das electr. Fluidum in den Leitern wie in Röhren unter Überwindung von Reibung strömt, wobei Wärme entwickelt wird = Joule'schen Wärme (und Quadrat = prop. Kraft). Dagegen in Dielectr. ist fortdauernde Strömung nicht möglich, da wird jedes Theilchen des Fluidums gleichsam durch elastische Kräfte zurückgehalten. Es entfernt sich zwar unter ~~Annahme~~ Wirkung von electr. Kräften aus der Ruhelage um Strecke, welche prop. sind der Kraft, aber nur endlich groß. Wenn nun Änderung der Kraft eintritt so auch Änderung dieser elastischen Verschiebung also eine Bewegungsgeschw. welche prop ist $\frac{de}{dt}$, Strom $= \frac{K}{4\pi}\frac{de}{dt}$.

Ähnlich unter Annahme der Clausius Mossotti'schen Hypoth. über die Dielectrica.

Wenn nun durch Berührung mit einem Drahte entladen, so strömt auch in den Kugeln die Elect. in derselben Richtg.

Diese Hypothese ist ja wahrscheinlich ebenso wenig richtig wie die naive Vorstellung von den zwei electrischen Fluidis, aber sie bietet doch einen Fingerzeig in dieser Richtg. Experimentell in dieser Form nicht gut realisierbar, weil in Wirklichkeit Wechselströme eintreten und deshalb schon keine magnetische Wirkg ausgeübt wird.

Hauptgrund: Richtigkeit der Folgerungen; insbesondere ist dies überall nöthig um electr. Schwingungen zu erklären.

Wo also sowohl eine galvan. Leitfähigkeit besteht, als auch dielectr. Verschiebung,

dort wird der Gesammtstrom = $\frac{K}{4\pi}\frac{de}{dt} + L(e-e') = c$

Da nun wie gesagt nur geschlossene Stromlinien so div $c = 0$

also c = curl eines Vectors

Was das für ein Vector ist, sieht man leicht aus dem Gesetz des Electromagnetismus

Unendliche geradlinige Strom Kraft $h = \frac{2C}{r_0}$

$$2\pi h r_0 = \frac{4\pi C}{} = \int h\, dr = \int \mathrm{curl}\, h\, df$$

$$= 4\pi \int c N$$

Da man nun die Gestalt des Integrationsgebietes beliebig wählen kann so folgt wenn man es unendlich klein macht:

curl $h = 4\pi c$ Das gibt die erste Hauptgleichung.

2). Heaviside hat besonders darauf aufmerksam gemacht auf den Parallelismus zwischen magnetischer und electr. Kraft, etc.

Man könnte schon von vornherein erwarten dass eine ähnliche Stellung für den Magnet gilt. Aber der Unterschied, dass es keine magnetischen Leiter gibt, daher auch keine wahre magnet. Massen. Während man auf einer Metallkugel eine + Ladung anbringen kann, kann man nicht eine + magnet. Masse isolieren, so dass sie dann andere + abstösst und andere − anzieht.

In der alten Theorie rechnet man zwar mit solchen Massen, aber es wird immer ausdrücklich gesagt, dass auch das kleinste Stückchen immer gleichviel + als − an den beiden Enden habe; somit strenge genommen es gibt gar keine + magnetische Raumdichte. div $h = 0$ somit h oder richtiger μh = curl

4/18 Noch genauer wird Gleichung bestimmt durch das Inductionsgesetz

In einem geschl. Stromkreis inducir. e m Kraft = Änderung der Anzahl der Kraft~~linien~~ Strichen die durch den geschl. Str. durchgehen. Ist Kreisförmig:

$$\int e\,dr = \int \frac{dh}{dt}\,df = \int \operatorname{curl} e\,df$$

$$\frac{dh}{dt} = -\operatorname{curl} e$$ das ist im allgem. nur für Luft, sonst noch mit μ zu multipl.

$$\mu \frac{dh}{dt} = -\operatorname{curl} e$$

Der Unterschied ist einerseits das Vorzeichen, dann eben dass $\frac{I}{...} = 0$ wegen.

Zu diesen Gleichungen kommen eigentlich noch zwei Energiegleichungen.

Allgemein pflegt Energie gegeben sein als Product zweier Factoren

Maxwell folgte wohl am meisten dem Bilde des elast. Zwanges, wo auch

Energie $= \frac{E f^2}{2}$ E = Elasticitätsconstante $= \frac{f \cdot d}{2}$ $d = \frac{K}{4\pi} e$

ebenso auch hier elektrostat. Energie $= \frac{K}{8\pi} \int e^2$ resp $= \frac{1}{2} \int f\,(Ke)$ $= \frac{2\pi d^2}{K}$

neuer Vector $\to d$ dielectr. Verschiebung

Also überall wo elektrost. Kraft wirkt, entsteht eine sog. ↑ und En = $\frac{\text{Product}}{2}$

Analog magnetische Energie $= \frac{\mu h^2}{8\pi}$

Alles pro Volumelement, also Gesammt-Energie $= \Sigma^{\infty} dv$

Auch in der alten Theorie kommen ähnliche Ausdrücke vor.

Dagegen in äolotropen Körpern!

Dies alles sollte nicht als Beweis gelten, sondern nur etwas plausibel machen, Beweis besteht in den richtigen Folgerungen, die ich jetzt im Einzelnen kurz durchnehmen werde.

I. Statische Zustände

$\mathrm{curl}\, e = 0$

$\mathrm{curl}\, h = 4\pi L (e - e')$

Da wollen wir zuerst noch einen Spezialfall untersuchen, nämlich wo auch $h = 0$.

e' die äusseren Kräfte werden auch $= 0$ vorausgesetzt

Es muss dann e überall $= 0$ sein, wo die Leitfähigkeit $L > 0$

kann dagegen endliche Werthe haben wo $L = 0$ also in Isolatoren.

[Man kann das auch anders definieren: statische Zustände ohne Energieverbrauch
Folgt dann auch aus dem Joule'schen Gesetz; Stromwärme =

$Q = \int e\, i \quad = L \int e^2$]

Diese beiden Definitionen kommen auf dasselbe hinaus, da die Entstehung eines curl h eben mit Energieverbrauch verbunden ist. Also mit anderen Worten wir behandeln die Electrostatik.

Haben also nur electr. Kräfte. Alle mit Anfangs- & Endpunkt

Daher $\quad e = \nabla \int \frac{\mathrm{div}\, e}{4\pi r_0}\, dv \qquad$ wir nennen nun $\frac{\mathrm{div}\, e}{4\pi} = \rho_f =$

Raumdichte der freien electr. Massen $\qquad e = \nabla \int \frac{\rho_f}{r_0}\, dv$

Dort wo K constant ist, ist auch der früher erwähnte Vector d mit e gleichgerichtet und demselben proportional

Es wird also dort auch wirbelfrei vertheilt sein. An den Punkten wo K veränderlich ist, also z.B. an den Grenzflächen zwischen zwei Medien mit verschiedenem K, gilt dies nun im Allgemeinen nicht mehr,

aber darauf kann ich hier nicht näher eingehen, es werden dann im Allg. an diesen Stellen auch geschlossene d Linien vorkommen, aber für uns hat das kein Interesse, da uns nur der Theil von d angeht, der eine div. hat. Wir sehen also von den geschlossenen d Linien überhaupt ab und können dann auch setzen:

$$= d' = \frac{K}{4\pi} e' = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$d = \nabla \int \frac{\operatorname{div} d}{4\pi r_0} dv = \nabla \int \frac{\rho_w}{4\pi r_0} dv \qquad \rho_w = \operatorname{div} d$$

Also hat auch d ein scalares Potential auch d kann man von Massenbelegungen ableiten, welche man in diesem Falle wahre electr. ρ_w nennt.

Welche von diesen Massen sind nun jene welche man sonst für gewöhnlich als electr. Ladung zu bezeichnen pflegt. Bisher waren d und e ganz symmetrisch gebraucht, es ist also eigentlich willkürlich welchen Buchstaben man dafür gebraucht. Maxwell, Heaviside etc. pflegen nun die gewöhnl. electr. Ladungen als wahre ρ_w zu bezeichnen. Das sind nämlich jene deren algebraische Summe = 0 sein muss, da je immer wie schon in der alten Theorie gezeigt wird, ebensoviel positive als negative Elect. erzeugt wird.

Das wird aus einigen Beispielen klarer

Leiter e — ebenso — $d = \frac{Ke}{4\pi}$

$$\rho_w = \operatorname{div} d$$

Da nur die innere und äussere Kugel geladen so sitzen nur an deren Oberfläche

$\not{V}$

curl e = 0

$4\pi L(e-e') = 0$

$$e = -\nabla \int \frac{\rho_f}{r_0}\, dv \qquad \rho_f = \frac{\operatorname{div} e}{4\pi}$$

Dort wo $L = 0$ kann e und div e von vornherein beliebig sein

$$K \frac{d}{dt} \operatorname{div} e + 4\pi L \operatorname{div} e = 0$$

wo $L = 0$ kann div e sich überhaupt nicht mehr ändern

Entsteht im Inneren von Isolatoren ein div e, und ebenso div d, so bleibt dies für immer festgenagelt. Für gewöhnlich betrachtet man den Fall, wo div d in den Isolatoren = 0 ist.

(wo L sehr gering, können mitunter die eigentümlich Rückstandserscheinungen entstehen

Dort wo $L > 0$ muss $e = 0$

Also in Isolatoren: $\operatorname{div} d = \operatorname{div} e = 0$ daher $\nabla^2 P = 0$

in Leitern: $d = e = 0$ $P = \text{const.}$ $\nabla P = 0$

Nur an den Grenzflächen ~~W~~ verschiedener Leiter oder Isolatoren ~~kann~~ div e ≷ 0

~~Dort ist div e =~~ Daraus folgt sofort, dass e und d auf den Leiteroberflächen ⊥ stehen müssen.

An Oberfläche:

$$\operatorname{div} e\, dv = (e_1 - e_2)\, dF$$

$$\operatorname{div} d\, dv = (K_1 e_1 - K_2 e_2)\, dF$$

$$\rho_f\, dv = \sigma_f\, dF \qquad \sigma_f = \frac{e_1 - e_2}{4\pi}$$

$$\rho_w\, dv = \sigma_w\, dF \qquad \| \sigma_w = K_1 e_1 - K_2 e_2$$

~~N.~~ An Leiteroberfläche

$$\sigma_f = \frac{e_1}{4\pi} = -\frac{\nabla P}{4\pi} = -\frac{\frac{\partial P}{\partial N}}{4\pi}$$

$$\sigma_w = -K_1 \frac{\partial P}{\partial N}$$

Wenn wir keine Leiter hätten so könnte man die ρ_w resp. ρ_f beliebig annehmen daraus beliebige P und ~~Q~~ bilden und beliebige e und d bekommen. Nun müssen aber die P die Bedingung erfüllen, dass ∇P im Innern der Leiter überall $= 0$ ist also $P = \text{constant}$; da ist die Verteilung von ρ^σ nicht mehr willkürlich; es werden die σ

2/19 auf der Oberfläche bis auf Proportionalitätsconstante eindeutig bestimmt.

Das bildet das allgemeine Problem der Electrostatik: Auffinden der Electr. Vertheilg.

könnte entweder σ veränderlich nehmen, damit P bilden etc. so dass, aber dies wäre schwer durchführbar. Man versucht im Gegentheil solche P zu finden welche der Gleichg $\nabla^2 P = 0$ genügen und an ~~innerhalb~~ der ~~Leiterräume~~ Leiteroberfläch constant werden; für das Innere der Leiter setzt man P = Const. und findet daraus ρ, ~~also eigentlich~~

So entstehen die Aufgaben über Electricitätsvertheilg auf Kugeln, Ellipsoiden, Kugelschalen etc etc.

Dies betrifft die e und d Vertheilg

Zweite Aufgabe die ponderomotorischen Kräfte zu finden:

/.

die Ladungen ρw, ebenso auch die ρf also soweit kein Unterschied

wenn aber Medium variabel

$$d = \frac{Ke}{4\pi} = \text{const}$$

dies nehmen vor El. 1: in Isol. kann keine wahre Elektr. Ladg erzeugt werden

Jetzt sitzen auch fictive Ladungen auf der Grenzfläche

e

K>

K<

Da sieht man dass dies rein fictive Rechnungsausdrücke sind, denn ~~[illegible]~~ von der Grenzfläche kann man keine Electr. wegschaffen, da sich keine dort befindet, man hat auch keine hingebracht. Der Nutzen dieser Feststellung erst durch Anwendung auf

---

Coulomb's Gesetz.

Berechnen nämlich die Gesamt Energie: $\frac{1}{2}\iiint S\, e\, d\,.\,dv$

Mit Hilfe des Green'schen Satzes

$$\iint S\, a\, N\, df = \iiint \operatorname{div} a\,.\,dv$$

Statt a setzen wir jetzt ein Product ~~[illegible]~~ $a = m\,b$

~~Dann $\operatorname{div} S b c = \frac{\partial}{\partial x}(b_1 c_1) + \frac{\partial}{\partial y}(b_2 c_2) + \frac{\partial}{\partial z}(b_3 c_3) =$~~

~~$= b_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial c_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial c_3}{\partial z} + c_1 \frac{\partial b_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial b_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial b_3}{\partial z} = S\, b\, \operatorname{div} c$~~

$$\operatorname{div} m b = \frac{\partial}{\partial x} m b_1 + \frac{\partial}{\partial y} m b_2 + \frac{\partial}{\partial z} m b_3 =$$

$$= b_1 \frac{\partial m}{\partial x} + b_2 \frac{\partial m}{\partial y} + b_3 \frac{\partial m}{\partial z} + m\left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z}\right)$$

$$= S\, b\, \nabla m + m \operatorname{div} b$$

4/19

Jetzt setzen wir $m = P \quad b = \nabla \varphi$

Dann wird:

$$\mathrm{div}(P\nabla\varphi) = S\,\nabla P\,\nabla\varphi + P\nabla^2\varphi$$

und Greenscher Satz:

$$\iiint dv\, S\,\nabla P\,\nabla\varphi + \iiint P\nabla^2\varphi\, dv = \iint S\,P\nabla\varphi\, N\, dF$$

$$P = \int \frac{\rho_f}{r_0}\, dv \quad \| \quad e = \nabla P$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_w}{r_0}\, dv \quad \| \quad d = \nabla\varphi$$

$$\iiint S e\, d\, dv + \iiint P\, \mathrm{div}\, d\, dv = \iint S N.P.d\; dF$$

$= 0$ wenn Fläche in ∞ Entfernung

also $$T = \frac{1}{2}\iiint S e\,d.\,dv = \frac{1}{2}\iiint P\,\mathrm{div}\,d\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\iiint P\rho_w\, dv = \frac{1}{2}\int \rho_w\, dv \int \frac{\rho_f}{r_0}\, dv = \frac{1}{2}\iint \frac{\rho_w \rho_f}{r_0}\, dv\, dv$$

Man kann natürlich die Integrationsfolge auch umkehren und sagen.

$$= \frac{1}{2}\int \varphi\,\rho_f\, dv \quad =$$

Jetzt Änderung von T bei Verschiebung der Körper z.B. zwei Kugeln

wobei nur ein Dielektrikum $\quad dv\,\rho_w = \mathrm{div}\, d_{dF}$

$$= \frac{d}{dF} = \frac{K}{4\pi}\frac{e}{dF}$$

o o

$$\rho_f = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\, e = \frac{e}{4\pi}$$

$$\rho_w = K\rho_f$$

$$T = \frac{1}{2K}\iint \frac{\rho_w^2}{r_0}\, dF$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2K}\iint \frac{\rho_w^2\, df}{r_0^2} = \frac{1}{2K}\iint \frac{\rho_w}{r_0^2}\rho_w\, dT = e$$

$$T = \frac{1}{2}\int \rho_w\, dw \int \frac{\rho f}{r_0}\, dw = T_1 + T_2 + T_{12} + T_{21}$$

$$-\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2}\int \rho_{1w}\, dw \int \frac{\rho_2 f}{r_0^2}\, dw + \frac{1}{2}\int \rho_{2w}\, dw \int \frac{\rho_1 f}{r_0^2}\, dw$$

$$= \frac{1}{2}\, m_{1w}\, \frac{m_{2f}}{r_0^2} + \frac{1}{2}\, m_{2w}\, \frac{m_{1f}}{r_0^2} = \frac{m_{1f}\, m_{2w}}{r_0^2} =$$

$$= K\, \frac{m_{1f}\, m_{2f}}{r_0^2} = \frac{m_{1w}\, m_{2w}}{K\, r_0^2}$$ Voraussetz. dass die Energieänderung nur auf die mechanischen [illegible] geht

das $\int \frac{\rho f}{r_0}$ ist das gewöhnl. elektr. Potential

dagegen f_w die gewöhnl. elektr. Masse

also wenn wahre Ladung zuläßt, dann im Körper mit größt. K ist die ponderomot. Kraft im Verhältnis K kleiner; wenn dagegen im solchen Körper auf bestimmtes Pot. gebracht so im Verh. K größer.

Also könnte auch hier Elektrostatik in gewöhnlicher Weise entwickelt werden; Vortheil dass man auch ohneweiters die ponderom. Wirkg freier elektr. Massen einsieht, was sonst nur durch sehr complicirte gekünstelte Theorien. Wirkg elektr. Felder auf Isolatoren mit anderen K!

Sehr bemerkenswert, dass hier das Coulomb'sche Gesetz nur durch das Energiegesetz aus dem Max. v. Schluß folgt, es ist gar nicht nöthig anzunehmen, dass e eine Kraft im mechanischen Sinne ist, denn e bewegt keine mechanischen Massen (wie noch Hertz annimmt), sondern irgend eine Vectorgröße, ebensowie d, so dass Prod = Energie. (Vielleicht irgend eine verborgene Geschwindigkeit)

Die Electrostatik wird in der gew. Theorie die Th. der Magnetismus an die Seite gestellt und ebenso parallel entwickelt unter der Annahme von ~~…~~ ± Mengen

In der Maxwell'schen Th. fällt dieser Theil ganz fort, od. richtiger wird erst beim Electromagnetismus zur Sprache kommen.

Denn kein wahrer Magnetismus

$\frac{d}{dt} \operatorname{div} \mu h = 0$ also wenn nicht von Anfang bestehend so kann nicht erzeugt werden.

Allerdings gelten die M. Gl. nicht strenge für die ferromagnetischen Körper, denn hier ist μ selbst von h abhängig und dies ~~noch~~ nicht nur von dem momentanen Zustande von h abhängig sondern von den vorausgegangenen Zuständen Hysteresis und remanenter Magnetismus.

μ — h

b — h

Die Veränderlichkeit des μ und rem. und Hyst. scheinen in keinem unmittelbaren Zusammenhang zu stehen, da es Legirungen gibt die das eine sehr gross, das andere sehr klein haben.

Weiches Eisen, Stahl

Beim Magn. tritt ferner der merkwürdige Umstand auf, dass $\mu < 1$ sein kann (diamagnetisch). Kein Unterschied gegen Dielectricitätsconstante, welche > 1 zu sein scheint (und für feste Körper > 2). Dabei auch keine Veränderlichkeit von K. Mehrfache Versuche aber noch nicht festgestellt.

Trotzdem also die Maxw. Gleichg. für diese Körper nicht strenge gelten, erscheint es doch bedenklich die Existenz von wahrem Magnetismus zuzulassen, denn es zeigt sich ja auch in der Praxis, dass man nicht ein + Theilchen isoliren kann wie + Electr.

Erklärung dieses Verhaltens: Ampère's Molecularströme.

Föppl eifert zwar sehr heftig dagegen, aber es scheint mir doch dass er viel zu weit geht. Würde alles auf ~~electrischen~~ magnetischen Stromwirkungen zurückführen. (Ebenso Wärme vorkapitel: magnetisch weiche und harte Körper)

Also lassen wir uns ~~[illegible]~~ die magnetischen Wirkungen für später.

Electrostatische Felder mit e'.

Wenn $h \gtrless 0$, aber $\frac{dh}{dt} = 0$:

$$\text{curl}\, e = 0$$

$$4\pi\lambda(e - e') = \text{curl}\, h$$

Dort wo ~~[illegible]~~ $\lambda = 0$, muss wie früher die e ~~[illegible]~~ constant sein, denn $\frac{d}{dt}$ div $d = 0$ wäre es in den Isolatoren $\lessgtr 0$ so könnte man diese als electrostatische Kräfte behandeln

8/19 Also können wir voraussetzen $\operatorname{div} e = 0$ im Isolat.

in Leitern muss es ebenfalls $= 0$ sein, ~~[illegible]~~ wenigstens dort wo kein e' auftreten, weil ~~dort~~ $e = \frac{\operatorname{curl} h}{4\pi\lambda}$.

Da haben wir also $\operatorname{curl} e = 0$ überall

und $\operatorname{div} e = 0$ überall ausser den Stellen wo $e' \gtrless 0$

Wenn somit kein e' Stellen wären so wäre überall $e = 0$.

Betrachten wir die Stellen wo $e' = 0$ dort

$$\operatorname{curl} e = 0 \qquad \operatorname{div} e = 0 \qquad e = \nabla P$$

$$\nabla^2 P = 0$$

Also Stromlinien, die innerhalb des Raumes nicht geschlossen und nicht Anfang

P_2 $e' \gtrless 0$

P_1 $e' \gtrless 0$

Gewöhnliche Potentialfunktion

$$e = \frac{\partial P}{\partial s}$$

in jeder solchen Stromröhre fliesst gleichviel der ganzen Länge nach

Wenn zwei von versch. Querschnitt u. versch. Länge so natürlich prop. q. und $\frac{1}{\text{Läng.}}$

Joule's Gesetz unter Voraussetzung, dass ebensoviel Arbeit als einem mechanische Arbeit zum Verschwinden bringen der Menge von diese

$$e \, dt \, e = \Sigma e^2 \, dS$$

~~ad~~ Magnetismus: Abgesehen von Elektr. Strömen

Schrumpft in der Maxwell'schen Theorie sehr zusammen, da es keinen wahren M. giebt. Man könnte das ebenso entwickeln wie die Electrostatik, indem man $e=0$ setzt, aber da gibt es eigentlich nicht viel Neues zu sagen.

Freier Magnetismus besteht an Grenzflächen mit verschiedenem μ, dort würde also div h sein, dagegen div b überall $=0$. Da es wohl magnetische Verschiebungsströme nicht aber magn. Leitungsströme giebt.

~~Also~~ Überall wo $e'=0$ ist auch ~~$e=\nabla P$~~ curl = div $e=0$

Für diese Stellen könnte man also $e=\nabla P$ $\nabla^2 P=0$ setzen

wenn man den Werth von curl e resp div e auch an den Stellen wo $e' \gtrless 0$ ist, wissen würde, könnte man für e einen allgemein gült. Ausdruck aufstellen. Über jene Stellen (Thermoelectr., galv. El., etc) wissen wir aber nichts, daher pflegt man sie überhaupt von der Betrachtung auszuschließen

Insbesondere Spannungsstrom in Voltamen

Es genügt für die practischen Zwecke das Verhalten von e im übrigen Raume zu wissen.

In den fraglichen Schichten kann man entweder div e annehmen oder curl e
(Helmholtz) Heaviside.

Im übrigen $\nabla^2 P=0$, dann natürlich Sprung an der Grenzfläche

4/20 Dieses P ist das galvanische Potential der Stromleiter

Wenn sie linear sind wird es einfach $e = \frac{\partial P}{\partial s}$

Widerstand = $\frac{\overset{\text{durchfließende Menge}}{\Sigma\, e \ldots}}{P - P'} = \frac{P - P_1}{\Sigma\, q\, \frac{P-P_1}{l}} = \frac{l}{q\Sigma}$

Joules Satz ..

Ebenso könnte man die sonst üblichen Übungsbeispiele über Stromverzweigung, Strömung in Platten etc. durchführen.

[Analogie mit Wärmeströmung, Flüssigkeitsströmung, etc.]

Soweit nur die eine Gleichung benützt

jetzt aber $\operatorname{curl} h = c$

$\operatorname{div} h = 0$

$$h = \nabla + \operatorname{curl} \int \frac{c}{r_0}\, dv + \nabla P$$

← etwas analoges wie bei El. strömung kann nicht eintreten daher $= 0$

Vectorpotential

Wenn lineare Stromleiter

$$h = \operatorname{curl} \int \frac{J\, ds}{r_0}$$

$$\operatorname{curl} \frac{ds}{r_0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{ds_1}{r_0} & \frac{ds_2}{r} & \frac{ds_3}{r} \end{vmatrix} = i\left(\frac{y\, ds_3}{r^2} - \frac{z}{r^2} ds_2\right) = i$$

$ds_2 \quad ds_3$

$\frac{z}{r^2} \quad \frac{y}{r^3}$

$$= \nabla\left(\nabla \frac{1}{r}\right) ds$$

$$h = J \int \nabla ds \;\; \nabla\left(\frac{1}{r_0}\right) \qquad h_1 = \frac{J}{r^2} \int \left(ds_2 \frac{z}{r} - ds_3 \frac{y}{r}\right)$$

$$\nabla ds\, \nabla\left(\frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{r_0} ds_0 \sin \ldots$$

$\nabla \frac{1}{r}$ bedeutet aber Kraft nach $\frac{1}{r^2}$ in Richtung der Elemente

daher in V: Kraft $\perp$ auf Element und Verbindungslinie

= Biot Savart'sches Gesetz.

Natürlich ist eine solche Zerlegung eigentlich unberechtigt aber wenn man um ganze geschlossene Stromleiter herum integriert kommt das richtige heraus.

Wenn die Ströme nicht linear so gilt ebenso

$$h = \int \frac{1}{r_0^3} V c r \, dv \quad = +\int V c \nabla(\tfrac{1}{r}) \, dv \quad = \text{curl } a \qquad a = \int \frac{c}{r_0} dv$$

Dies gilt auch allgemein, wenn unter c der ganze Strom $= Lc + \frac{K}{4\pi}\frac{dc}{dt}$ verstanden wird.

Im Allgemeinen operiren wir mit linearen Stromleitern; im übrigen Raume ist $L = 0$ daher curl $h = 0$, also curl h beschränkt auf Drähte.

Ausserhalb ist curl $h = 0$ und div $h = 0$

Also könnte man daran denken, ausserhalb des Drahtes dasselbe ein scalares Potential aufzufinden so dass $h = -\nabla P$. Dies ist factisch die von altersher übliche Methode. Darauf kann man kommen, indem man das $\int$ direkt transformirt oder durch folgende mehr geometrische Überlegung.

$$\int \nabla P \, dr = \text{Arbeit bei Verschiebung um } dr = J \int dr \int \frac{V ds . r}{r_0^3} =$$

$$= J \iint \frac{r}{r_0^3} V dr \, ds$$

$$\int r\, V ds\, dr = \text{Vol.}$$

$$\frac{1}{r}\text{Vol} = \text{Fläche} \perp$$

$$\frac{1}{r^3}\text{Vol} = \frac{\text{Fläche}\perp}{r^2} = \text{Gesichtswinkel } do$$

Somit $\int VP\, dr = J \int do = J d\omega$ wo ω = Gesichtswinkel unter welchem die ganze Curve erscheint

Daraus folgt: $P = J\omega$

Natürlich kann man ω ebenso wie vorher wieder zurücktransformieren

$$\omega = \int\int \frac{r}{r_0^3} V ds\, dr = \int\int \frac{N r}{r_0^3} dF = \int dF \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial N}$$

also $P = J \int dF \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial N}$

Daraus folgen zwei Interpretationen von P:

Gesichtswinkel . . magnet. Doppelschicht ~~und~~ (Schale), welche von den Stromrändern begrenzt wird

Werth derselben von specieller Lage ganz unabhängig

in Wirklichkeit müsste man natürlich einmal durch die Schale hindurch gehen; dies gilt auch das Verhalten der Kraftlinien wieder

↑ Dies dient am besten zur Veranschaulichung

einerseits Endpunkte, andererseits Anfangspunkte

Fläche gleich ω = Äquipot. Flächen

(positiv so gerechnet, wenn der Strom im Uhrzeiger fliesst)

Folgender Weg

↓∞

2π

⊙ ⊙

↑ statt 4π

?2π

∞

4π ↓∞

hier erscheint die Oberfläche als Kugel mit einem verschwindend kleinen Loch welches durch die Strom Curve begrenzt ist

wenn man dann wieder am selben Weg herkommt, ist jetzt das Potential um 4π gewachsen, also vieldeutig $\omega \pm n\,4\pi$. Dies zeigt eben dass das P in diesem Fall keine wirklich reelle physikalische Grösse sein kann, sondern nur ein Rechenbehelf, ein Surrogat um das Vectorpotential zu ersparen.

Es gilt natürlich nur solange der Punkt nicht in den Strom selber hineinrückt, dort ist ein curl, dort kann man mit P überhaupt nichts ausrichten (also in körperl. Leitern) dies gibt sich darin zu erkennen, dass sowohl ω für diesen Fall unbestimmt wird, also auch die Doppelbelegg.

Sonst pflegt man mit dem ∞ langen geradlinigen Strome zu beginnen

Eigentlich keinen Sinn, denn muss wieder wo geschlossen sein

Schliesst in irgendwo im ∞; $\omega = 2\pi - \varphi \pm 4\pi n$

φ ω Strom P

$\frac{4}{21}$ Energie des magnetischen Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int b h \, dv = \frac{1}{8\pi}\int b \operatorname{curl} a \, dv$$

kann transformiert werden.

Dazu braucht man Satz: $\operatorname{div} V ab = S b \operatorname{curl} a - S a \operatorname{curl} b$

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \frac{\partial}{\partial y}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \frac{\partial}{\partial z}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_2 \frac{\partial b_3}{\partial x} - a_3 \frac{\partial b_2}{\partial x} + a_3 \frac{\partial b_1}{\partial y} - a_1 \frac{\partial b_3}{\partial y} + a_1 \frac{\partial b_2}{\partial z} - a_2 \frac{\partial b_1}{\partial z} \quad \ldots\ldots$$

$$= \text{obiges}$$

$$8\pi T = \int dv \, S a \operatorname{curl} b + \underbrace{\int dv \operatorname{div} V ab}$$

$$= \int dF \, \underset{=0}{S N V ab}$$

$$= \mu \int dv \, S a \operatorname{curl} h = 4\pi \mu \int dv \, S a c$$

$T = \frac{\mu}{2} \int S a c \, dv$ für linearen Leiter $= \frac{\mu}{2} J \int S a \, ds$

$$a = J' \int \frac{ds}{r_1}$$

$$T = \frac{\mu}{2} J J' \int \frac{S \, ds \, ds'}{r_0}$$

kann zerlegt werden in (wenn z.B. 2 Stromleiter)

$$= \frac{\mu}{2} \left[J_1^2 \int \frac{S \, ds_1 ds_1'}{r_{01}} + J J_1 \int \frac{S \, ds_1 ds_2'}{r_{012}} + J_1 J \int \frac{S \, ds_2 ds'}{r_{012}} + J_2^2 \int \frac{S \, ds_2 ds_2'}{r_{02}} \right]$$

$$T = \mu \left[J_1^2 \frac{C_1}{2} + J_1 J_2 C_{12} + J_2^2 \frac{C_2}{2} \right]$$

Selbstinductions Coeff und Coeff. der wechselseitigen Induction

werden sonst geschrieben

$$\int\int \frac{ds\, ds'}{r_0} = \int \frac{ds_0\, ds_0' \cos \varepsilon}{r_0}$$

Also Änderung dieses Ausdruckes gibt die Energieänderung, also die gelieferte Arbeit, und daraus ergibt sich die ponderomotorische Arbeit; und ~~das ist so ziemlich~~ alles was in einem

---

Nach der alten Theorie kommt man zu demselben Ausdruck auf folgende Weise; Potential eines Kreisstroms $= i\omega$ = $i \times$ Anzahl der Kraftlinien welche vom Punkt ausgehen

~~oder Doppelschichte mit Magnetismus~~ ~~i belegt~~

Anderer Strom $i'\omega'$; ~~ein magnetisches Theilchen i der ersten Schale hat dann Energie $i i' \omega$ also im Ganzen~~: äquivalent mit Schale welche beiderseits mit i' belegt ist; ein solches Theilchen hat Energie $i \times$ Anzahl der Kraftlinien des Theilchens i' also im ganzen

$i \times$ Anzahl der Kraftlinien des Stromes i' durch Strom i

also $$i\int\int N h\, dF = i \int\int N \operatorname{curl} a\, dF = i \int a\, ds = i i' \int\int \frac{ds\, ds'}{r}$$

Veränderliche Zustände, Induction.

Induction

Electrom. Kräfte welche inducirt werden bei Veränderung des magn. Feldes
~~Können~~ Geben sich nur zu erkennen als Strom in geschlossenen Leitern

$$\int \mathfrak{E}\, ds = \int\!\!\int N \operatorname{curl} e\, dF$$

$$= -\mu \int\!\!\int N \frac{dh}{dt}\, dF = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int N h\, dF = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int N \operatorname{curl} a\, dF$$

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int a\, ds\, dF \qquad a = i \int \frac{ds}{r}$$

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int \frac{ds\, ds'}{r} \cdot i$$

= Abnahme der Zahl der Kraftlinien = ~~i mal~~ Abnahme des Selbst-Ind. C. × i

Über endl. Zeit integrirt = durchgeflossene Electr.-Menge . w

$$= \mu\, (i' M'_{12} - i M_{12})$$

Im Allgemeinen Berechnung dieser Coeff. ziemlich schwierig, (besonders auf zeichnet)
also vermehrt bei Abnahme der Distanz r
je näher alles beisammen
und je länger ~~des~~

Funkeninductor
Transformator

Erfahrungsthatsache dass dies auch gilt, falls die Änderung des magnetischen Feldes nicht in Folge Änderung der Stromstärke im inducirenden Leiter sondern in Folge Änderung von M, also Änderung der Lage der infolge Bewegung eintritt.

Dynamomaschinen

Selbstinduction: Anwachsen des Stromes, dann noch fortdauern weil noch magn. Kraftlinien im Felde sind. Vollständig

$$i_1 w_1 + \frac{d}{dt}(C_{11} i_1) = -\frac{d}{dt}(C_{12} i_2)$$

$$= E$$

2/22

Ebenso wird auch die ponderomotorische Arbeit gegeben durch die Änderung des ~~Aus~~ Ausdruckes: $i i' M$

also M im allg. f. $(x\, y\, z\, \alpha\, \beta\, \gamma)$

Kraft in ... $i i' \frac{\partial M}{\partial x}$ .. $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ etc.

~~Unter die~~ Um sich die Richtg. der Kraft zu ~~[illegible]~~ merken: suchen sich immer so zu stellen dass die Anzahl der Kraftlinien am grösten wird.

Dabei aber eigenthümlicher Umstand:

~~Also~~ ~~W~~ wenn d. Kraftlinienzahl zunimmt = + Strom ~~[illegible]~~ welcher

Stromwärme erzeugt dem Quantität = $i i' dM$

dabei muss aber auch von aussen ebensoviel mechanische Arbeit geleistet werden $i i' dM$; es müssen also die Batterien jetzt die doppelte Arbeit leisten $i i' dM$; wobei die Herstellg des magn. Feldes, wie auch die Stromwärme jetzt auf Kosten der Batterie.

Helmholtz Erhaltung der Kraft

Darauf kann hier nicht näher eingegangen werden, wir ~~[illegible]~~ können uns mit Electricität nur insoweit beschäftig, als sie uns ~~[illegible]~~ als Anwendung unserer Rechng besonders interessiert.

83 3/22

Eigenthümliche Theorie über Energiestrom von Poynting

$$K\frac{de}{dt} + 4\pi L(e-e') = \text{curl}\,h \quad \Big|\; e \qquad T = \frac{Ke^2}{8\pi}$$

$$\mu\frac{dh}{dt} = -\text{curl}\,e \quad \Big|\; +h \qquad + \frac{\mu h^2}{8\pi}$$

$$e\,\text{curl}\,h - h\,\text{curl}\,e = \text{div}\,Vhe = \frac{d}{dt}T$$

daraus hat Poynting geschlossen dass überhaupt die Energie eine Strömung Vhe bildet

Dabei ist natürlich noch ein beliebiger curl dazuzufügen!

Also ist dies natürlich nur eine Hypothese, welche aber gut den Gegensatz zu der alten Theorie zeigt, wo das Dielectricum nur eine rein passive Rolle hatte.

Das Inductionsgesetz haben wir vorhin schon auf bewegte Körper angewendet, auf Erscheinungen die bei Lagenänderung der Körper eintreten. Das ist natürlich nur als Annäherung gültig da unsere Gleichungen nur für ruhende Körper aufgestellt sind, ~~und wären~~ welche allerdings recht gut stimmt, soweit unsere Erfahrung geht.

Hertz u.a Gleichungen für bewegte Medien } nur hypothetisches
J J Thomson Recent ~~Researches~~ } unter Annahme eines
mit der Materie sich mitbewegenden ~~ruhenden~~ Äthers

$\frac{4}{22}$

$\frac{1}{23}$ so dass die Kraftlinien mitgeführt werden.

Wien, Lorentz, Frage inwieweit Äther.

Lichtäther.

Nach Hertz, Maxwell etc.: magnetische Wirkung von Convectionsstrom

Rowland, (Leiter-), Röntgen, ~~Äther~~ Himstedt Rowland.

Capitel welches nur in Maxwell'schen Theorie vorkommt

Electrische Wellen

$K\frac{de}{dt} = \text{curl}\, h \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial t}$

$\mu\frac{dh}{dt} = -\text{curl}\, e \;\Big|\; \text{curl}$

$\mu K\frac{d^2e}{dt^2} = -\text{curl}^2 e$

$= -\nabla \text{div}\, e + \nabla^2 e$

$= \nabla^2 e$

div $e = 0$ also keine Longitudinal nur Transversal-wellen

$e = f \cos \left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right)$

$f = f_1 i + f_2 j + f_3 k$

~~$\mu K\alpha^2 =$~~

$\nabla^2 e = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 e_0 \cos \ldots$

$\frac{d^2 e}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$\Big\}\; \frac{1}{\lambda^2} = \frac{K\mu}{\tau^2}$ $\quad \lambda = \tau\sqrt{\frac{1}{K\mu}}$

$\frac{de}{dt} = -\frac{2\pi}{T} f \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) = \frac{de}{dx}\frac{dx}{dt}$

$-\frac{2\pi}{\lambda} f \sin \ldots \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{1}{K\mu}}$

$\frac{V}{V'} = \sqrt{\mu' K'} = n = \sqrt{K}$ Brechungs-Exp. $= \sqrt{K}$

$\nabla^2 h = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 h$ ~ ~~$h = g\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$~~

$e = i\, f_1 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$
$+ i\, f_2 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$
$+ k\, f_3 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$

$\operatorname{div} e = 0$
$= f_1 \sin \ldots = 0$
$f_1 = 0$

Also Richtg. $e \perp x$ Transversalwellen — das ist unmittelbar evident aus dem Begriffe $\operatorname{div} = 0$

Ebenso h $\quad K\frac{de}{dt} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$ $\quad h = j\, g_2 \cos - + k\, g_3 \cos \ldots$

$-K\frac{2\pi}{T}\left[j f_2 \sin 2\pi \ldots + k f_3 \sin\right] = j\, g_3 \frac{2\pi}{\lambda}\sin + k\, g_2 \frac{2\pi}{\lambda}$

$f_2 \cdot \frac{K}{T} = g_3 \frac{1}{\lambda}$

also e und h $\perp$ aufeinander

Hätten dasselbe erhalten wenn die Werte von und e in die zweite Gleichg eingesetzt und integriert w. wäre

Also wenn Fortpfl. ~ in x so e in y h in z

Transversale Wellen, welche mit Geschw. $\frac{1}{\sqrt{K\mu}} = 3 \cdot 10^{10}$ fortschreiten.
Auf verschied. Methoden ganz genau gleich somit Lichtgeschw.
= Lichtgeschw. , Elektromagn. Lichttheorie; wenn man Äther als elast. Medium auffasst so erhält man auch Wellenbewegungen aber

1). Schwierigkeit die enorme Elastizität
2). Die Nichtexistenz von longitudinalen Wellen
insbesondere müssten solche auftreten bei Reflexion an Trennungsflächen

3/23

sind aber noch nie beobachtet worden und was noch bedenklicher ist, sie müssten sich dadurch zu erkennen geben, dass Energie der refl. und abs. St. < ausfällt.

Um dies zu umgehen hat man ganz eigenthümliche Constructionen des Äthers erdacht W. Thomson's quasirigiden Äther. etc.

Hier fallen alle diese Schwierigkeiten fort.

3). $\sqrt{K} = n$ der Erfahrung stimmt das wohl meist überein

$n =$ cca 1'5 $\quad K =$ cca 2 $\quad$ Paraffin, Petr., Schwefel etc.

Genau kann das natürlich nicht stimmen, denn n ist ja keine Constante, abhängig von Wellenlänge und ebenso hat sich gezeigt, dass K abhängig ist von der Art, wie es gemessen wird, ob bei constant wirkender electr. Kraft, oder bei raschen Schwingungen besonders auffallend bei manchen Electrolyten, wo ausserdem noch Leitungsfähigkeit vorhanden ist. Es ist aber die Theorie in dieser Form noch nicht vollständig; um die Dispersion zu berücksichtigen, müssten die Eigenschaften der Molekule berücksichtigt werden, ebenso wie bei der richtigen Theorie denn das gilt ja eigentlich bloss für ideale Dielectrica

Recht augenscheinliche Beweise für die EMLT bedeuten aber erst die Versuche von Hertz, welche zugleich den ganzen alten Theorien den Garaus machten indem sie bewiesen, dass die Em Kraft Zeit braucht um sich fortzupflanzen

Electr. Schwingungen

Langsame Wechselströme, Funkeninductoren, Tesla Ströme

$n = 10^5$, Leydnerfl.-Entladungen $n = 10^6$, theoretisch zu berechnen und nachweisbar mittelst rotierenden Spiegel

~~Durch Vert~~ Diese sind immer noch verhältnismässig langsam

Wellenlänge $= 10^4$

Aber durch Verkleinerung der Capacität und Selbstinduction gelang es Hertz schliesslich Wellen von einigen 10^9 zu erzeugen, welche also schon in Vacuum

verschiedene Form

Dass dies wirklich eine Wellenbewegung ist, folgt am deutlichsten aus der Existenz von stehenden Wellen

bei Reflexion von Metallwänden von Drahtenden etc. Knotenpunkte

Das ist gleichbedeutend damit dass Zeit erforderlich ist um sich auszubreiten. Durch Verkleinerung der Cap. etc. und Empfindlichkeit der Resonatoren ~~[illegible]~~ ist man schon bis auf λ von wenigen mm Wellenlängen gekommen ~~[illegible]~~ während andererseits die Lichtstrahlen durch das ultrarothe Ende hindurch bis zu λ = 50–60 μμ = 0·05 mm verfolgt worden sind. Allerdings scheint es jetzt kaum mehr möglich von dieser Seite noch viel weiter vorzudringen.

Natürlich mannigfache Variation der Versuche: Nachweis durch Geissler-Röhren, Bolometer, mechanische Wirkung, Cohärer, directes Leuchten etc.

Die Ähnlichkeit mit Lichtstrahlen besonders auffallend durch Versuche über Reflexion, Brechung (Linsen, Prismen von Pech etc.) bei der gewöhnlichen Erregung sind sie polarisirt, Nachweis: Gitter von Metalldrähten. Metalle sind nämlich absolut undurchlässig während Isolatoren durchlässig sind:

In Halbleitern:

$$K\frac{de}{dt} + 4\pi L e = \text{curl}\, h \quad \Big| \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mu\frac{dh}{dt} = -\text{curl}\, e \quad \Big| \quad \text{curl}$$

$$K\frac{d^2e}{dt^2} + 4\pi L\frac{de}{dt} = \nabla^2 e$$

} Eine solche Diff. Gleichung ist charakteristisch für gedämpfte Schwingungen in absorbirenden Medium [illegible]

$$e = f\, e^{-\alpha x} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \alpha \cdot e + \frac{2\pi}{\lambda} f\, e^{\alpha x} \sin \ldots$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \alpha^2 e + \frac{4\pi\alpha}{\lambda} f\, e^{\alpha x} \sin + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} f\, e^{\alpha x} \cos$$

analog für h aber jetzt mit Phasendifferenz!

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + K\mu\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= 0 \\ 2\alpha\,\tau &= 4\pi\mu\lambda \end{aligned}\right\}$$

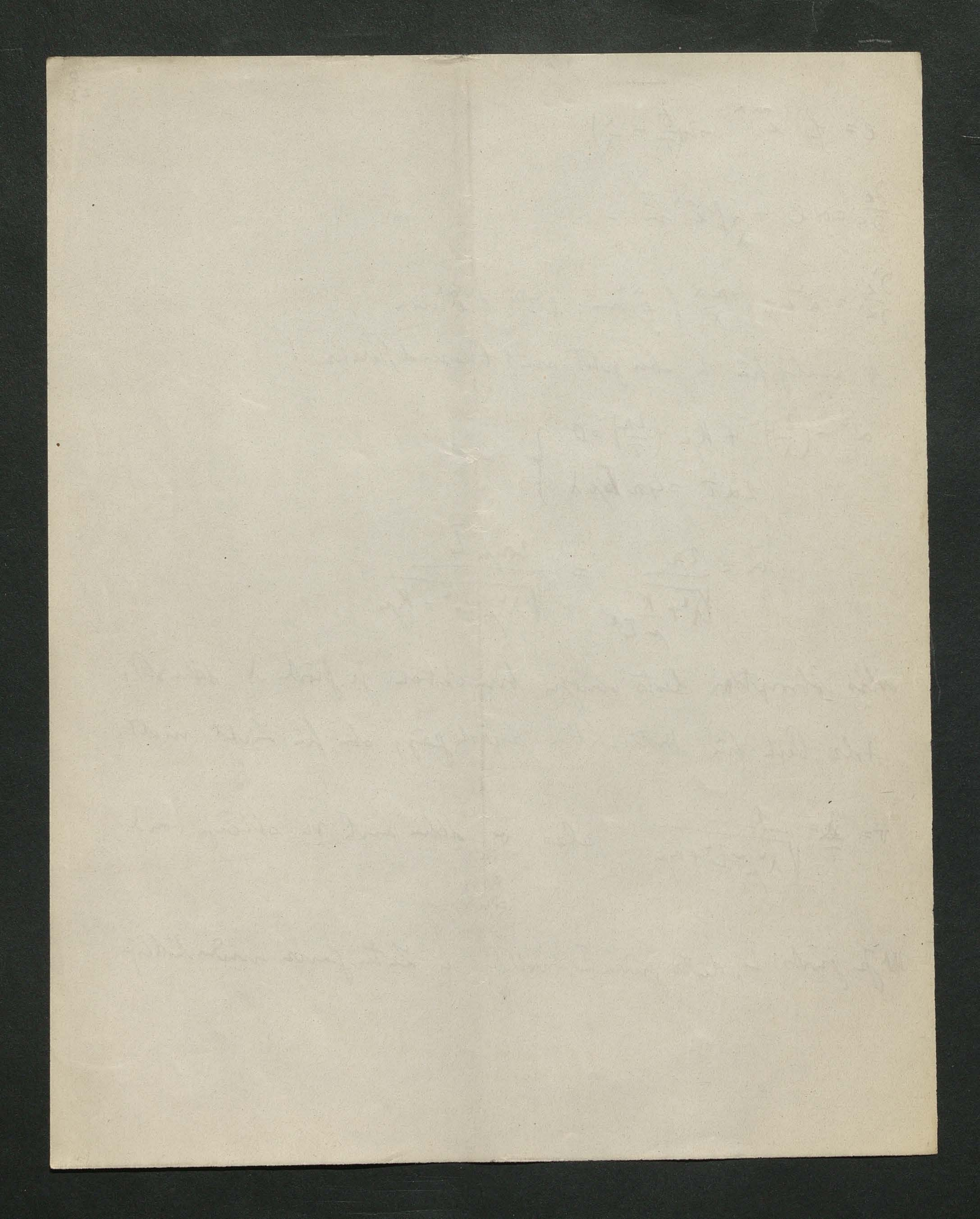
$$\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{K}{\mu\tau^2}}} = \frac{2\pi\mu\tau}{\sqrt{\lambda^2\mu^2\tau^2 + K\mu}}$$

Also Absorption desto weniger bemerkbar je größer λ, daher z. B. Holz, Pech für Hertz'sche Wellen durchgängig aber für Licht nicht.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2\mu^2\tau^2 + K\mu}}$$ also v, daher auch n abhängig von λ

= Dispersion

Je größer τ, desto größer τ, vollkommene Leiter ganz undurchsichtig.



Hydromechanik

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{da}{dt} = f'$$

also: $m = \rho\, dv$

$$f' = f \rho\, dv - \nabla p\, dv$$

äußere Kräfte gerechnet prop. in Bezug auf Masseneinheit

$$\frac{da}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Wobei jedes Partikel auf seinem Wege verfolgt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (S a \nabla)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + (S a \nabla) a &= f - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho a) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Euler'sche Gleichungen

Verschiedene andere Formen: Lagrange, Clebsch, Neumann etc.

Vereinfachung: indem nur für tropfbare Flüssigkeiten ρ = constant. Jene Erscheinungen wo Variabilität von ρ in Betracht kommt, gehören in die Akustik

---

Hydrostatik $\quad \frac{1}{\rho} \nabla p = f$

$\nabla p = g \rho$ wenn nur Schwere

$p = g \rho z + \text{const}$

zB. Körper eingetaucht in Flüssigkeit

Drehungsmoment und Result. Kraft.

$$\text{Res Kraft} = \Sigma f = \int p \, dF \, N$$

$$= \int g\rho \int z N \, dF$$

$N = i \cos l + j \cos m + k \cos n$

$$= g\rho \left[i \int z \, dF_1 + j \int z \, dF_2 + k \int z \, dF_3 \right]$$

(die ersten beiden) fallen weg weil jedem + ein − Werth entspricht mit gleichem z

$$= g\rho \, k \int z \, dF_3 = \rho g \, k \iiint dz \, dF_3 = g\rho \, k \times \text{Volum.}$$

Archimedes Princip

Dazu kommt aber noch im Allgem. ein Drehungsmoment:

$$\Sigma V f r = \int V p \, N r \, . \, dF$$

Dafür lassen sich nicht mehr so einfache Ausdrücke finden, man muss eben zerlegen in Compon. und integrieren

Dies ist zB. bei Schiffbau von Wichtigkeit

Eigentliche Hydrodynamik

Ungemein wichtige Zerlegung der Bewegung in Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung.

~~Satz : Wasserrein~~

Was das Kennzeichen für Wirbel ist, haben wir schon kennen gelernt

wenn $\mathrm{curl}\, a \gtrless 0$ ist, so heisst das, dass an der betreffenden Stelle

das Flüssigkeitsvolumelement rotiert, denn wir haben ja

früher gezeigt, dass bei starren Körpern curl der Geschw.

die doppelte Rotationsgeschw. gibt $\quad a = a_0 + V \times r \quad \mathrm{curl}\, a = 2c \quad$ [~~…~~ curl a

---

Man kann sich immer zerlegen $a = \nabla P + \mathrm{curl}\, b + \nabla A$

$$a = \nabla \int \frac{\mathrm{div}\, a}{r}\, dv + \mathrm{curl} \int \frac{\mathrm{curl}\, a}{r}\, dv + \nabla A \qquad \nabla^2 A = 0$$

bei incomp. $= 0$

Also Flüssigkeitsbewegung von zwei Potentialen ableitbar einem scalaren

Geschwindigkeitspotential A und einem Vectorpotential b

~~Fl~~ Letzteres wird nur dann von 0 verschieden sein, wenn curl a nicht

überall Null ist also bei wirbelnden Flüssigkeiten

Dagegen bei wirbelfreien ~~Fl~~ Bewegungen, wo $\mathrm{curl} = 0$, dort wird die

Geschw. $a = \nabla A$ sein also $\quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

[Geschw. Potential

Das Wichtige dieser Zerlegung liegt nun darin, dass:

Bewegt sich eine Flüssigkeitsmasse wirbelfrei so wird sie sich immer so

bewegen, ihre Wirbelgeschw. bleibt immer constant, solange nur solche äusseren

Kräfte wirken, welche ein Potential haben [Natürlich nur für ~~…~~ reibungslose ideale Flü.]

$$\frac{da}{dt} = f - \frac{1}{\rho}\nabla p$$
$$\downarrow \nabla U \qquad = \nabla P$$

$\frac{d}{dt}(\operatorname{curl} a) = 0$ also curl a unveränderlich mit der Zeit

das $\frac{d}{dt}$ ist aber nicht bezogen in Bezug auf einen fixen Punkt des Raumes sondern auf bestimmte Theilchen in seiner Bahn

Es kann natürlich an einem Punkte einmal ein Wirbel bestehen und dann aber anderswohin gehen, aber die Theilchen die einmal im Wirbel drin sind bleiben immer drinnen und die Intensität des Wirbels bleibt unveränderlich

Gegen diesen Beweis könnte man noch Einwendungen machen, dass in $\frac{d}{dt}$ die a enthalten ist, daher curl nicht vertauscht werden kann

Klarer daher folgender Beweis (nach Kelvin):

$$\int S\, a\, ds = \text{Circulation} = \iint \operatorname{curl} a\, N \cdot dF$$

Die Gestalt der Fläche ist willkürlich nehmen wir d. Wirbelröhre

Dann trägt zu dem Integral nur die Endflächen bei

also Circulation = curl a × Querschnitt der Wirbelröhre

diese ist also in einer Wirbelröhre constant

Wenn man Querschnitt unendlich klein macht bekommt man also q

$q \cdot \operatorname{curl} a = \int S\, a\, ds$ in diesem Punkte

$$\frac{d}{dt}\int S a\, ds = \int S \frac{da}{dt} ds + \int S a \frac{d^2 s}{dt}$$

$$\int S a\, da = \frac{1}{2}\int d S a^2$$

$$= \int S \nabla P\, ds + \int d S \frac{a^2}{2}$$

$$\int dP$$

über geschl. Curve $=0$

also Circulation constant in einer mit der Flüssigkeit fortschreitenden Bahn

somit Wirbel constant (wenn Wirbel = Produkt $q \times$ curl a).

Wirbel können somit mittelst conservativer Kräfte nicht erzeugt werden, aber wenn sie da sind, so sind sie ewig. [Können aber wohl erzeugt werden z.B. durch Reibung oder Kräfte im electr. Strom].

Bekanntlich hat Kelvin diese merkwürdige Eigenschaft zu seiner Wirbelatomtheorie die Anregung gegeben.

Rauchringe; solche üben auch gegenseitige Anziehungen und Abstossungen aus [von J. Thomson näher untersucht] können durch einander hindurchgehen

st. Mathem. Behandlung ungemein schwierig. Ellipt. Functionen.

Überhaupt ist über wirbelnde Bewegungen trotz der Bemühungen vieler

Forscher, namentlich in England, relativ wenig herausgebracht worden.

Wirbel in 2 Dimensionen sind leicht zu behandeln, aber schwer in 3 Dim.

Viel mehr cultiviert wurde seit jeher das Gebiet der Potentialbewegungen

da es ja in unmittelbarem Zusammenhang steht mit den wichtigen

Untersuchungen in Electr. etc., wo $\nabla^2 A = 0$.

Die ganze Sache reduziert sich in diesem Fall darauf, Lösungen dieser

Strömung zu finden, welche den gegebenen Anfangsbedingungen genügen.

Es entspricht also jedem electrostat. Problem (auch ein hydrodynam. oder jedem Problem der stationären Strömung)

z.B. El. Feld zw. 2 Kugeln

Wenn an der Grenzfläche Flüssigkeit mit

dieser bestimmten Quantität ein oder ausströmt

so würden Stromlinien jene Gestalt haben

Electr. Strömung zw. 2 Pun[kt]

Electroden

Bei Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f - \frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \Big\| \qquad \frac{\partial}{\partial t}\nabla A = \nabla\left(gz - \frac{p}{\rho}\right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = gz - \frac{p}{\rho} + \text{const}$$ wenn die Const. ... in $\frac{\partial A}{\partial t}$ ...

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_0 = g z_0$$ Eigentlich ist $\frac{\partial A}{\partial t}$ bei Oberfläche zu nehmen, aber dies ist beinahe $= \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z=0}$

$$z_0 = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_0$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = w_0 = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0$$

$$A = f(z)\sin\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}f(z) + f''(z) = 0$$

$$f'(z)^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}f(z)^2 + \left(\text{const} = 0\right)$$

$$f'(z) = \pm\frac{2\pi}{\lambda}f(z)$$

$$f(z) = Me^{\frac{2\pi}{\lambda}z} + Ne^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}$$

$z = -h:\ f'(z) = 0$

$$Me^{\frac{2\pi}{\lambda}h} = -Ne^{-\frac{2\pi}{\lambda}h} \qquad f(z) = C\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)}\right]$$

$$A = C\left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)}\right]\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$z_0 = \frac{2}{g}C\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$g\frac{2\pi}{\lambda}\left(e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \cdots = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_0 = -\frac{4\pi^2}{T^2}\left(e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}\right)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T}$

$$\frac{\lambda}{T} = c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}}{e^{-\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}}}$$

Dadurch ist also T bestimmt als $f(\lambda)$. λ muss durch Anfangsbedingungen gegeben sein.

Wenn man also ~~an irgendwo~~ eine solche Cosinuswelle herstellt und jedem Theilchen die aus der Formel folgende Geschwindigkeit gibt so wird sie sich mit der Geschw. in unveränderter Gestalt fortpflanzen

wenn ~~h klein~~ λ groß im Vergleich zu h:

$$\lambda \gg h$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \sqrt{\frac{-1+\frac{2\pi}{\lambda}h+1+\frac{2\pi}{\lambda}h}{1-\frac{2\pi}{\lambda}h+1+\frac{2\pi}{\lambda}h}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}h}$$

$$= \sqrt{gh}$$

$$\lambda \ll h$$

Dagegen wenn λ klein zu h: $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

Unabhängig von Dichte der Flüssigkeit analog wie früher Fall

Erster Fall: Wellen in seichtem Wasser, Erdbebenwellen

Wenn Flutwelle sich fortpflanzen würde

Zweiter Fall: gewöhnl. Meereswellen

Bahn jedes einzelnen Theilchens

$$a = \nabla A \cdot$$ ~~in Bahn: $a' = \nabla A + (\delta a t \nabla) a$~~ ~~zu vernachl. als Grad weiter Ordng~~

$$u = \frac{C}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + \cdots \right] \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \frac{d(x)-\xi}{dt}$$ { vernachlässigt

$$w = C \frac{2\pi}{\lambda} \left[e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} - e^{\cdots} \right] \sin 2\pi (\quad) = \frac{d(z)}{dt}$$

$$(x) = \frac{CT}{\lambda} \left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + \cdots \right) \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$(z) = C\frac{T}{\lambda} \left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}(z-h)} + e^{-} \right) \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

Also im Allgem. elliptische Bahn ~~nur für Oberfläche~~

Wenn $\frac{h}{\lambda}$ sehr groß ist, so beinahe Kreise

~~Das~~ aber
Das sind noch nicht alle möglichen Fälle, nur irrotat.
Es gibt aber auch Wellen mit Wirbelbew.
~~Dann muss Wirbel~~. Welche Form entsteht etc. hängt ab von äußern Umständ.,
~~etc~~ Da sind noch zu berücksichtigen Lufteinfluss, Reibung der Flüss., Reibung am Boden.
Capillarität.
Diese ist bei ganz kleinen Wellen das allein bestimmende
Kräuselwellen (ripples)

Wellen anderer Art: Flutwellen
Gleichgewichtstheorie von Newton, dynamische Theorie von Laplace, Airy,
Kelvin, Darwin
Unterschied liegt in der Trägheit der Flüssigkeit, welche im ersten Falle vernachl. wird. Dass dies wirklich als fortschreitende Wellenerscheinung aufgefasst werden muss, wird am klarsten, wenn man die Zeiten des Eintritts der Flut betrachtet und sieht wie sie sich aus dem offenen Meere in die Buchten etc. hineinverpflanzt. z.B. Cuxhaven-Hamburg ca 5 Stunden, weil seichtes Wasser langsame Fortpflanz., ebenso Gravesend-London
Höhe derselben steigt ungemein wenn in ~~Busen~~ Ästuarien, Buchten etc. verengt z.B. Canal von Bristol Höhe bis 15 m, während im freien Ocean nur wenige Decimeter

Berechnen lässt sich das natürlich nicht, weil zu complicirt, also empirische Deutung, indem man sich darauf stützt, dass es jedenfalls eine periodische Erscheinung ist und solche können immer in Summen von Sinusreihen aufgelöst werden

$\frac{1}{25}$ Harmonischer Analysator.

Diese Erscheinungen haben Anregung zu einer Menge der verschiedensten Untersuchungen gegeben. Größte Wichtigkeit für Geophysik etc.

Reibende Flüssigkeiten.

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (\mathfrak{a}\nabla)a = f - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2 a$$

$$\mu\frac{d}{dr}\left(r\frac{da}{dr}\right) + \frac{1}{\rho}\, r\,\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right) + \frac{p_2-p_1}{l}\,\frac{r}{\rho\mu} = 0$$

$$r\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{p_2-p_1}{l}\,\frac{r^2}{2\rho\mu} + \text{const}$$

$$a = -\frac{p_2-p_1}{l}\,\frac{r^2}{4\rho\mu} + \boxed{A\log r} + B$$

$$0 = -\frac{p_2-p_1}{l}\,\frac{R^2}{4\rho\mu} + B$$

$$a = \frac{p_1-p_2}{4\mu\rho l}\,(R^2-r^2)$$

$$2\pi\int_0^R a\, r\, dr = \frac{p_1-p_2}{4\mu\rho l}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)\pi$$

$$= \frac{p_1-p_2}{8\mu\rho l}\,R^4\pi$$

Poiseuille's Formel.

Exp. zeigt, dass kein Gleiten längs Oberfläche indem dieses Verhältnis r^4 sich bestätigt.

Auch für andere Formen als kreisförmige und ebenso für Gase von gemeinsamem mittlern Druck $\frac{p_1+p_2}{2}$; dabei jedoch bei sehr niedrigen Drucken: Gleiten

Sonst lassen sich Reibungs-Aufgaben leicht nur lösen wenn die quadratischen Glieder vernachlässigt werden

Quaternion

Bisher immer Skalar u. Vector getrennt.

Wenn man sie nun vereinigt = ~~Quat.~~

$Q = S + V$ ähnlich wie complexe Zahlen; die in Physik vorkommenden Größen sind allerdings keine Q sondern S oder V, aber als Rechnungsausdruck mitunter recht brauchbar

$Q\,ab = S\,ab + V\,ab \quad = ab = q \qquad Sq = Sab \quad Vq = Vab$

$= a_0 b_0 \cos\angle + a_0 b_0 \sin\angle \,.\, VC \qquad C \perp ab$

Hamilton allerdings definiert es etwas anders; er nimmt für Sab das negative Zeichen und definiert $Sab = -a_0 b_0 \cos\angle$, aber das ist Sache der Übereinkunft; um in Übereinstimmung zu bleiben werden wir setzen $Q\,ab = -Sab + Vab$

~~Unter dieser Definition kann man sich nun~~

Für sich hat Quat. in Physik keine Bedeutung, sie ist ein Operationszeichen, welches erst auf etwas angewandt werden muss

~~$qc = Sq\,c + Vqc$~~ Das Q Zeichen kann man auch weglassen und hat dann allgemein $ab = -Sab + Vab$

ebenso wenn eine Quaternion q $\quad qb = -Sqb + Vqb$

Wenn $a \parallel b \qquad a^2 = -Sa^2 = -a_0^2$

$a \perp b \qquad ab = Vab$

Anschauliche Bedeutung wenn man zu Quotienten übergeht, während wir bei S und V die Produkte anschaulich definieren konnten.

$a^{-1}b = Sa^{-1}b + Va^{-1}b$

~~das schreibt wir~~ $\frac{b}{a}$

dagegen wäre $ba^{-1} = \sout{S\,ba} = Sa^{-1}b - Va^{-1}b$

das schreibt $= \frac{b}{a}$

Wenn wir jetzt qa bilden

$$= S\,qa + V\,qa$$

$$= ~~S\,VVa^{-1}b\,.\,a~~$$

$$= S(Sq.a) + S(Vq.a) + V(Sq.a) + V(Vq.a)$$

$$= S(Va^{-1}b\,.\,a) + S\,a^{-1}b\,.\,a + V(Va^{-1}b\,.\,a)$$

$$= \underbrace{\quad}_{=0} + \frac{a\,Sab}{a_0^2} + \frac{V\,Vab\,.\,a}{a_0^2}$$

$$= b_0 \cos x + b_0 \sin x \,..\, D$$

Also a wird durch Multiplication mit q in der Form $qa = b$

in b verwandelt

Die Quaternion q, wenn sie einen Quotienten darstellt, kann man somit als einen Dreh-Operator betrachten, dessen Axe $\perp a, b$ steht

Denn es lässt sich leicht nachweisen, dass wenn irgend ein anderer Vector c in der Ebene von ab liegt und gleich lang ist wie a so wird er

in d verwandelt

Diese Operation besteht in einer Drehung und Dehnung

$$q = Tq\,.\,Uq$$

In obiger Notation kann man also setzen $b = (\underbrace{S\,a^{-1}b + V\,a^{-1}b}_{q})\,a$

33 $\frac{4}{25}$

Bestimmungsstücke einer Quat.:

$q = w + ix + jy + kz$ ‖ daher Norm ... | ebenso auch Tensor 1 Zahlangabe
Versor 2 Winkel für Axe und 1 W. z

Demgemäss sind sowohl
Scalar als Vector als degenerirte Quaternion aufzufassen

zB. $q_1 = ia_1 + ja_2 + ka_3$
$q_2 = ib_1 + jb_2 + kb_3$

$S q_1 q_2 =$

Rechnungsgesetze für Quat. folgen aus Definition

Addition und Subtraction so wie sonst

ebenso Multiplic.: associat. und distrib. Gesetz gültig
aber nicht commutativ

Der allgemeine Beweis allerdings sehr langwierig aber man kann auch umgekehrt aus V und S Gesetze beweisen für specielle Fälle

---

Noch spec. Fälle; Wann wird q = reiner Vector
wenn S ab = 0 also wenn ⊥

Daher Definition eines Vectors = Quotient zweier ⊥ Vectoren = Quadrant Versor
weil er eine Drehung um 90° erzeugt.

Reiner Scalar wenn a ∥ b

Also zB. haben wir gehabt $V i j = k$
das kann man dividiren durch $i^2 = 1$
$V i^{-1} j = k = V \frac{j}{i} = \frac{j}{i}$

k ist also als Hebelgriff aufzufassen welcher i in j überträgt
oder als Quotient von j durch i

1/26 Wir haben also definirt:

$$q(ab) = Sab + Vab$$

$$= \ldots$$

$$q\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b_0}{a_0}\cos\angle + \frac{b_0}{a_0}\sin\angle \cdot C$$

Wenn also $q\,a$ gebildet $= b$ Resultat = Überführung eines Vectors in einen anderen. Also Quaternion q = Quotient zweier Vectoren.

Es gilt das aber auch für beliebige Quat., denn immer können sie durch Division etc. in diese Form gebracht werden z.B. $q(ab) = q\left(\frac{b}{a}\right) \cdot a^2$

Also allgem. Quat. = Vector Überführungsoperator. Dies giebt sofort Zerlegung in zwei Bestandtheile $= q = Tq \cdot Uq$ Änderung und Drehung welche multiplicativ verbunden sind.

Andere Zerlegung folgt daraus, dass $q = Sq + Vq$

$$= w + ix + jy + kz$$

Daher Name Quaternion

Daraus kann man schon sämmtliche Rechnungsregeln finden, wie sich zeigen wird, aber auch direct.

Addition und Subtr. ohne weiteres wie sonst

bei Multipl. gilt assoc. und distr. Gesetz, aber nicht commutat.

Hamilton führt den allgemeinen Beweis auf geometrische Weise mittelst sphärischer Kegelschnitte, dies ist aber ungemein complicirt. Für Producte

von drei Vectoren etc. kann man das schon ~~ugs~~ aus den Regeln für S und V ableiten.

~~Quaternion: 4~~ Zahlenangabe
Specielle Fälle, wenn zu Vector degeneriert = Quotient zweier ⊥ Vectoren = Quadrant Versor, weil er Drehg um 90° erzeugt

$ij = Vij$ (weil $Sij=0$) $= k$ ‖

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij^{-1} = -k = \frac{i}{j}$

$k = \frac{i}{-j}$

j, i, k

$+k$ ist als Hebelgriff aufzufassen, welcher j in $-i$ überträgt resp. ebenso $-j$ in $-j$ resp.

Da sieht man auch ein, warum wir jetzt das negative Zeichen für S annehmen, denn:

$ij = k$ ‖

~~jk~~ $\times j$

$ijj = kj = -i$

somit $jj = -1 = j^2$

wir haben früher geschrieben

$Vij = k$

$V~~k~~Vij\,j = -V_j Vij = Vkj = -i$

Aber wir durften die Vector Zeichen nicht weglassen wir hatten nicht geschrieben $V(Vij.\,j) = ijj$ daher keine Notwendigkeit ~~um~~ zum Ersetzen zu machen.

3/26 Die Richtg von k ist willkürlich, also kann nach Hamilt jeder Vector aufgefasst werden als ~~Quat~~ Versor um ⊥ in einer zu seiner Richtg ⊥ Ebene

Bilden die beiden Vectoren keinen ∡ von 90° so ist dieser Quot. resp. Drehoperator kein einfacher Vector sondern Vector + Scalar

Dann sind diese 4 Bestimmungsstücke: Ebene der Quat. (2∡), Grösse des Drehwinkels und Grösse der Dehnung.

zB. $c' = \frac{b}{a} \cdot c$

würde dein Quat auf einen andern Vector angewendet, welcher nicht in ihrer Ebene liegt, so würde das Resultat nicht ein neuer Vector sondern wieder eine Quaternion sein.

Der Zweck dieser aller Festsetzungen liegt hauptsächlich in Vereinfachung der Rechng, man erhält da alle Formeln wie zB $VaVbc = cSab - bSac$ welche wir in Vector Analysis gehabt haben, ausserdem aber andere welche nur für Quat. anwendbar sind. zB.

$Sab = Sba$

$Vab = -Vba$

$ab + ba = 2Sab$

$ab - ba = 2Vab$

$Vab + Vba = 0$

2) Die obige Formel haben wir berechnet durch explicites Ausrechnen.

$$2Vbc = bc - cb$$

$$2V.aVbc = Vabc - Vacb + Vbac - Vbac$$

$$= V(ab+ba)c - V[(Sac+Vac)b + b(Sac+Vac)]$$

$$= Vc(2Sab) - 2Vb(Sac)$$

$$VaVbc = cSab - bSac$$

[Wir haben das verkehrte Zeichen gehabt]

In ähnlicher Weise kann man oft die Rechnungen vereinfachen, mit Hilfe dieser Multiplications Regeln. Für die Algebra der Quat. ist dies von vorzüglicher Wichtigkeit, weniger aber für die physikalischen Anwendungen, denn da kommen Producte von mehr als 3 Vectoren nur selten vor und die Formeln für diese haben wir schon abgeleitet.

Wenn man einen physikalischen Quat. Process ersetzt, so muss man sie zum Schluss doch wieder in Scalar u. Vector Theil spalten, weil nur diese physik. Bedeutung haben, und da ist selten V–

$Sab \quad Vab$

$SaVbc = Sabc$ denn $\quad bc = Sbc + Vbc$ etc.

$VaVbc$ oben ausgerechnet

5/26 Eine interessante Anwendung: Potenzen von Vektoren

Wir haben

$i = i$

$ki = j$

$k^2 i = -i$

$k^3 i = -j$

$k^4 i = i$ etc. also liegt es nahe die Potenzen mit

gebr. Exp. zu definieren $j = ki$

$$k^n i = i \cos\frac{n\pi}{2} + j \sin\frac{n\pi}{2} = (\cos n\frac{\pi}{2} + k \sin\frac{n\pi}{2}) i$$

$$k^n =$$

$$a^n = (Ta)^n \left[\cos\overbrace{\frac{n\pi}{2}}^{\vartheta} + \sin\frac{n\pi}{2} Ua\right]$$

Das kann weiter dienen um conische Rotationen zu beschreiben

$$r = a^{-1} . ar = a^{-1} Sar + a^{-1} Var$$

$$= -a\,Sar - \underbrace{a\,Var}_{b}$$

Das ist Zerlegung in Compon. in Richtung a und $\perp$

Ersteres bleibt bei Drehung unverändert, letzteres wird um a gedreht

$\frac{n\pi}{2} = \vartheta \,\|\, n = \frac{2\vartheta}{\pi}$ $\qquad a^{\frac{2\vartheta}{\pi}} b = a^{\frac{2\vartheta}{\pi}} a\,Var = a\,Var \cos\vartheta - Var \sin\vartheta$

$$r_1 = -a\,Sar - a\,Var\cos\vartheta + Var\sin\vartheta = (\cos\frac{\vartheta}{2} + a\sin\frac{\vartheta}{2}) r (\cos\frac{\vartheta}{2} - a\sin\frac{\vartheta}{2})$$

$$= a^{\frac{\vartheta}{\pi}} r\, a^{-\frac{\vartheta}{\pi}}$$

Dies wird in Krystallographie und in Mechanik starrer Körper von Nutzen sein. Für unendlich kleine ϑ = feiner Ausdruck $r + Var$

$$f = f_0 + \left[S(s\nabla)f\right]_0 + \ldots\ldots \qquad f = f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

$$s = s_1 i + s_2 j + s_3 k$$

$$S(s\nabla) = s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$f - f_0 = \left[s_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 + s_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 + s_3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0\right] i + (\quad) j + (\quad) k = \varphi(s)$$

} also allgemeine lineare Vectorfunction

Im allgemeinsten Falle sind nun sämmtliche Coefficienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ etc. von einander unabhängig

$$S\, r\, \varphi_0(s) = S\, s\, \varphi_0(r)$$

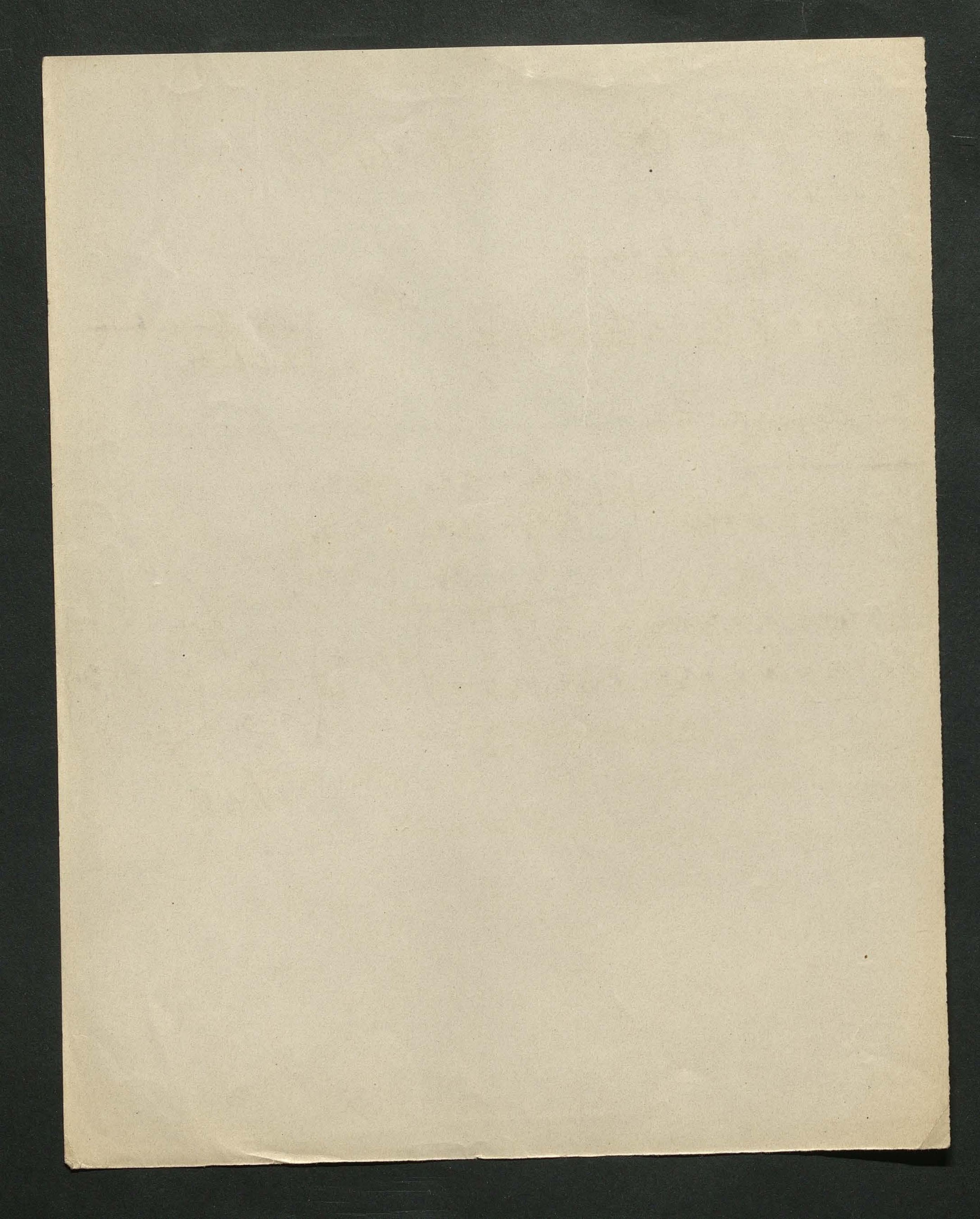
$$\begin{aligned} &(s_1 a_{11} + s_2 a_{12} + s_3 a_{13}) i \\ &(s_1 a_{21} + s_2 a_{22} + s_3 a_{23}) j \\ &(s_1 a_{31} + s_2 a_{32} + s_3 a_{33}) k \end{aligned}$$

$$S\, r\, \varphi(s) = (r_1 a_{11} + r_2 a_{21} + r_3 a_{31}) s_1 + \ldots$$

$$S\, s\, \varphi(r) = (r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + r_3 a_{13}) s_1 + \ldots$$

$$= \varphi_0 + \left\{ \begin{matrix} 0 & \frac{a_{12} - a_{21}}{2} & \frac{a_{13} - a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21} - a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23} - a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31} - a_{13}}{2} & \frac{a_{32} - a_{23}}{2} & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$V.\varphi, \sigma$$



Quaternion als Operator auf eine zweite Quaternion angewendet

$q = Sq + Vq$

$p = Sp + Vp$

$qp = (Sq + Vq)(Sp + Vp) = Sq\,Sp + \underbrace{Vq\,Vp} + \underbrace{Vq\,Sp + Sq\,Vp}_{\text{bleibt Vector}}$

$= S.Vq\,Vp$

$+ V.Vq\,Vp$

Somit wird qp ein reiner Vector wenn: $Sq\,Sp = -S.Vq\,Vp$

zB. $q = m + a$

$p = \frac{-Sab}{m} + b$

Es wird ein reiner Scalar wenn: ~~$Sq\,p$~~

$V.Vq\,Vp = -Vq\,Sp + Vp\,Sq$

~~zB. $q = m + a$~~ ~~Dies wird im Allgemeinen nicht mehr erfüllbar sein~~

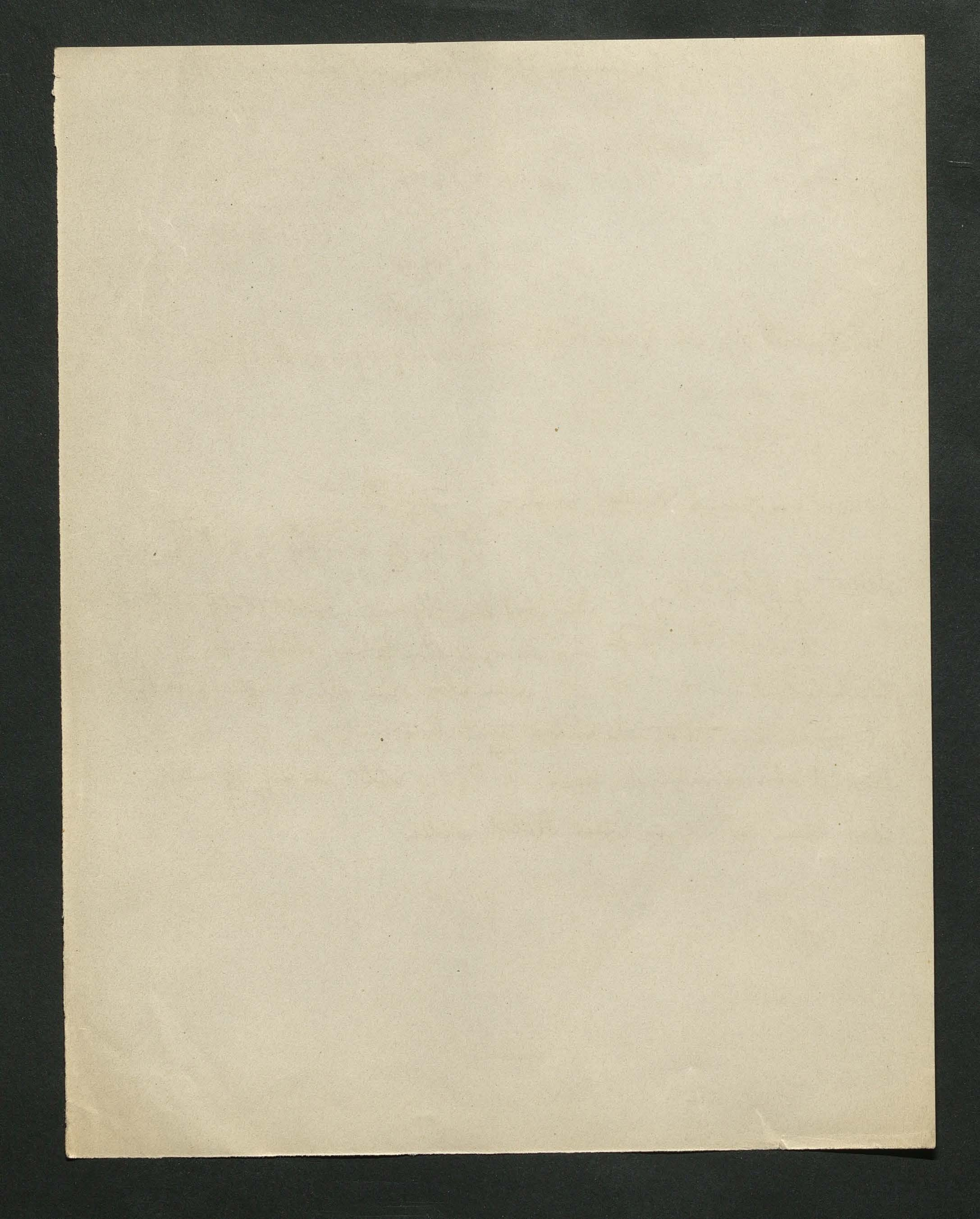
~~$p = m\,Vab + b$~~ ~~nur in speciellen Fällen, denn eine Vectorgleichung~~

~~= gleichbedeutend mit 3 Bedingungen; wenn also eine der 4 Größen $Vp\,Vq\,Sp\,Sq$~~

~~gegeben ist so sind schon die anderen mit bestimmt.~~

Dies ist aber unmöglich, denn $V\,Vq\,Vp$ steht $\perp$ auf Vq und Vp

also kann es nie ein reiner Scalar werden



$Q.ab = Sab + Vab$

Jeder Drehungs Operator $\frac{a}{b}$ ist eine Quaternion, ~~ist~~ kann aber auch umgekehrt jede beliebige Quaternion als Drehungs Operator aufgefasst werden?

Ja, denn die Quaternion dreht alle Vectoren welche auf Vab senkrecht stehen

$c \perp Vab$

$$Q.ab.c = c.Sab + \underbrace{Vab.c}_{V(Vab.c)}$$ = blosser Vector ohne Scalar theil

Als Definition des Zeichen's Q muss gegeben werden $Q = S + V$

Somit ist obiges eigentlich zu schreiben

$$Q[Qab.c] = S[Qab.c] + V[Qab.c] =$$

Es zeigt sich also, dass Q als Operator auf einen Vector angewendet die Eigenschaft hat denselben zu drehen, falls er ~~senk~~ $\perp$ darauf steht, sonst wird eine neue Quaternion daraus. — und zwar dreht er um 90° falls der Scalartheil S ~~ab~~ $= 0$ ist. ‖ Ebenso zweites Beispiel mit $Q(\frac{a}{b})$ und allgemein q

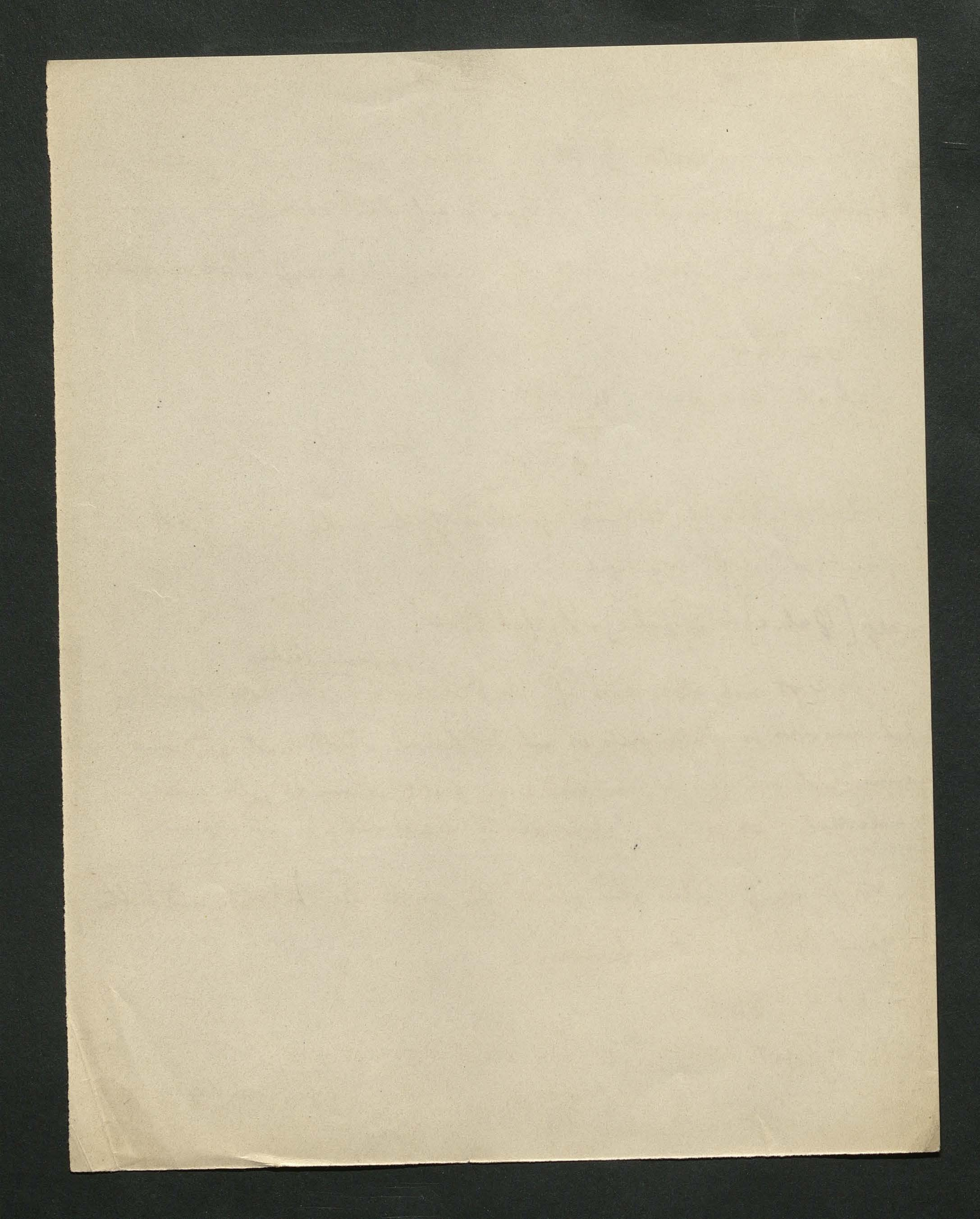
---

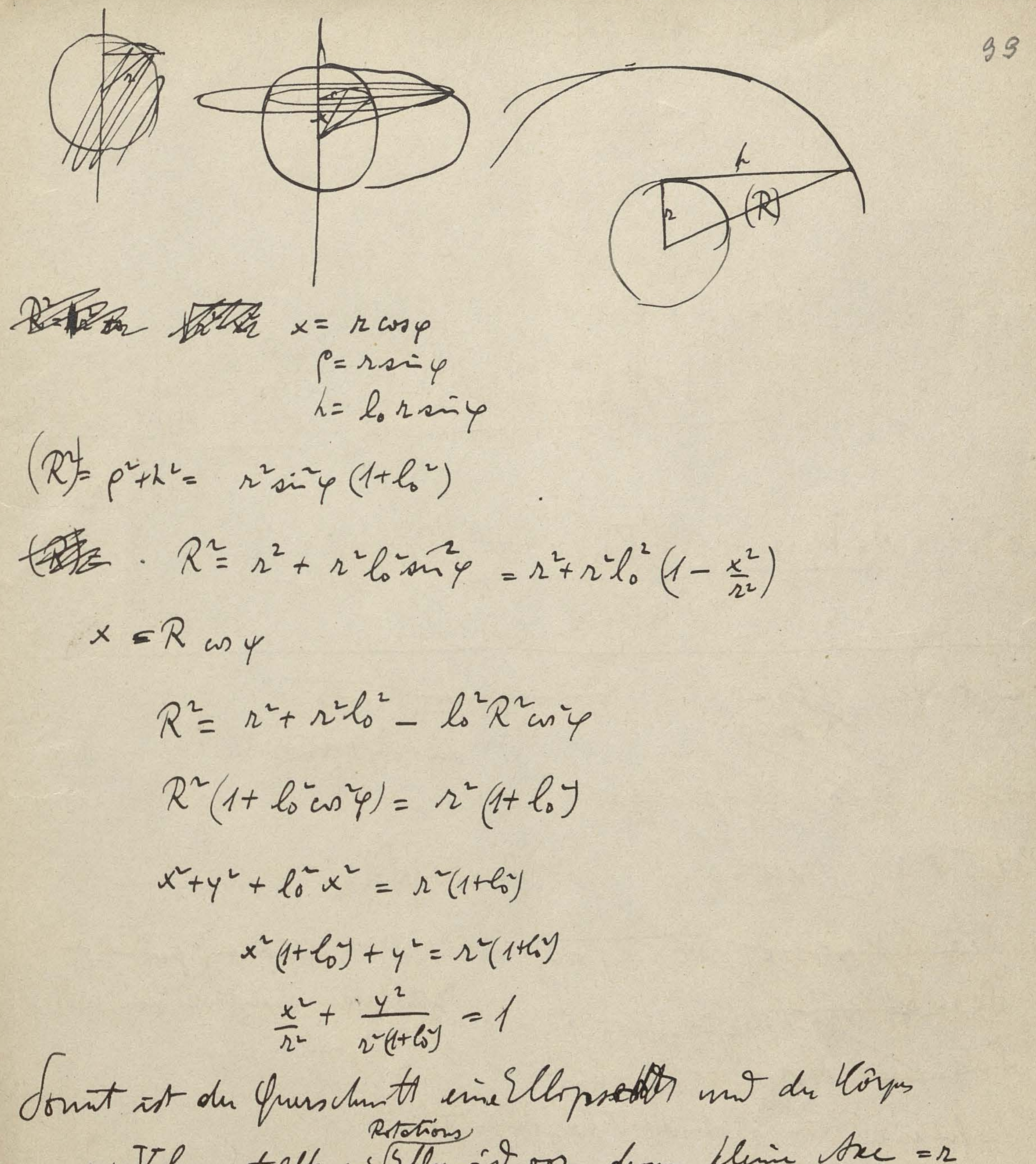
Betreffs der Q gelten ohne weiteres die Gesetze der Addition und Subtr. Dagegen Multipl. erst zu beweisen:

I $q.pr = qp.r$

$$(S_q + V_q)[(S_p + V_p)(S_r + V_r)] = (S_q + V_q)[S_p S_r + S_p V_r + S_r V_p + \underbrace{V_p V_r}_{= S V_p V_r + V V_p V_r}]$$

$$= S_p S_r \qquad V.q\, V V_p V_r = -V.q\, V V_r V_p = V$$





$$x = r\cos\varphi$$
$$\rho = r\sin\varphi$$
$$h = l_0 r \sin\varphi$$

$$(R^2) = \rho^2 + h^2 = r^2\sin^2\varphi\,(1 + l_0^2)$$

$$R^2 = r^2 + r^2 l_0^2 \sin^2\varphi = r^2 + r^2 l_0^2\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$x = R\cos\varphi$$

$$R^2 = r^2 + r^2 l_0^2 - l_0^2 R^2 \cos^2\varphi$$

$$R^2(1 + l_0^2\cos^2\varphi) = r^2(1 + l_0^2)$$

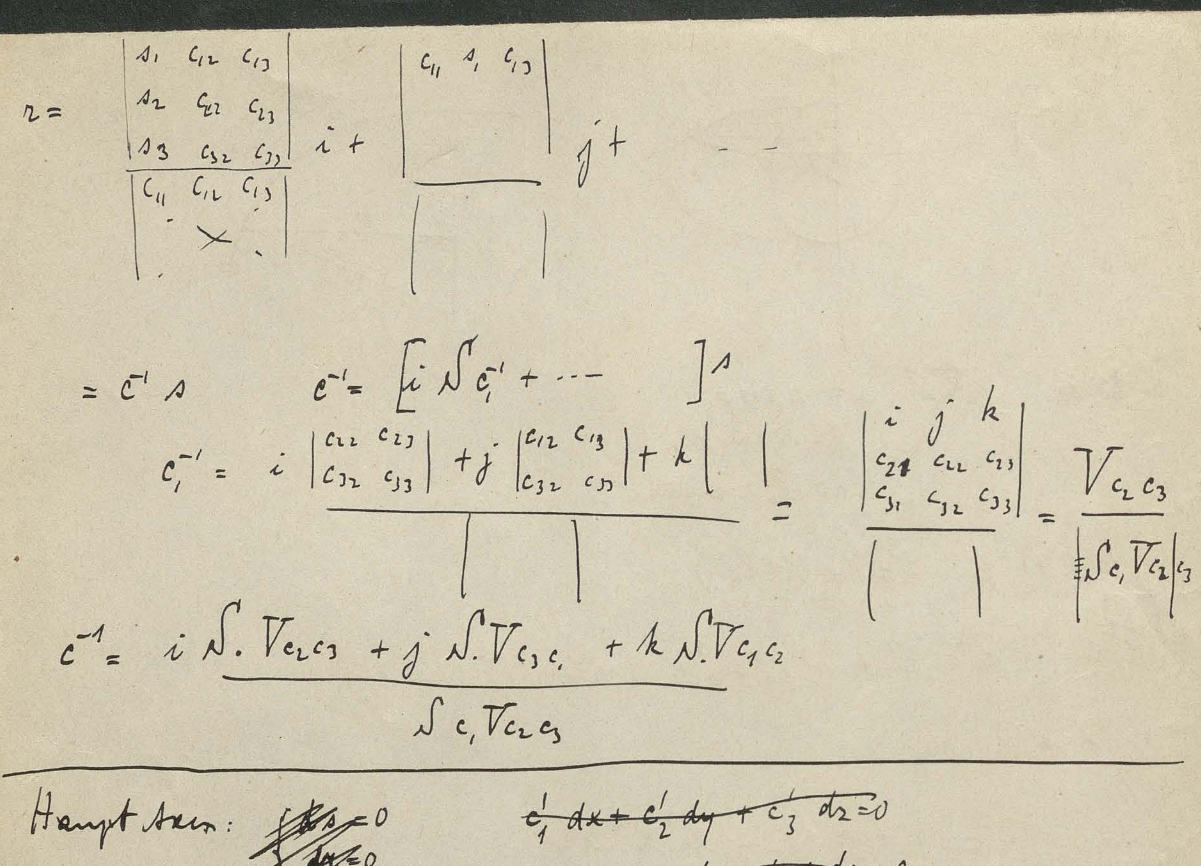
$$x^2 + y^2 + l_0^2 x^2 = r^2(1 + l_0^2)$$

$$x^2(1 + l_0^2) + y^2 = r^2(1 + l_0^2)$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2(1 + l_0^2)} = 1$$

Somit ist der Querschnitt eine Ellipse und der Körper $s = r + \sqrt{l r}$ stellt ein Rotations-Ellipsoid vor dessen kleine Axe $= r$

große $= r\sqrt{1 + l_0^2}$



Haupt Axen:

$d\,T s^2 = 0 \qquad d(s)^2 = 0 \qquad s^2 = (S c_1 r)^2 + (S c_2 r)^2 + (S c_3 r)^2$

$d(r^2) = 0$ Würde auf gewöhnliche Methoden der analytischen Geometrie zurückführen

Was für eine Fläche ist durch $r + V l r$ dargestellt?

$s = r + V l r \qquad s^2 = r^2 + S r V l r + (V l r)^2$

$S s m = 0$

Rotationsfläche um l als Axe mit Querschnitt von der Form:

Tait 242 (15)

100

$V(i-j)(i-k) = k+j+i$

~~i~~ $i \quad mj \quad nk$

$\rho = i + x(mj-i) + y(nk-i)$

$= i(1+x-y) + jmx + kny$

N Normale $= V(mj-i)(nk-i) = (mni + nj + mk)$

Sämmtliche Flächen werden erhalten durch Permutation von i, j, k / m, n, mn

$(i+j+k)^{\frac{1}{3}} N (i+j+k)^{-\frac{1}{3}}$

$Vij = k$
$Vik = -j$ } $V.i\,Vij = -j = V$

Andererseits werden sämmtliche Flächen auch erhalten werden durch

~~$i^{\frac{x}{2}}(\ )i^{-\frac{x}{2}}$~~ $\quad j^{\frac{y}{2}} i^{\frac{x}{2}} (\quad) i^{-\frac{x}{2}} j^{-\frac{y}{2}}$ } Bedeutet Symmetrie in Bezug auf drei Axen

wobei x und y alle ganzen Zahlen von 0 bis 4 bedeuten

Daraus folgt sofort: $= (ji)^{\frac{y}{2}} i^{\frac{x-y}{2}} (\ ) i^{-\frac{x-y}{2}} (ij)^{-\frac{y}{2}}$

$= (-1)^{\frac{y}{2}} k^{\frac{y}{2}} i^{\frac{x-y}{2}} (\ ) i^{-\frac{x-y}{2}} k^{-\frac{y}{2}}$

$= (-1)^{\frac{x}{2}} j^{\frac{y}{2}} k^{\frac{x-y}{2}} (\ ) \ldots$

$$\ddot{r} = f(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S r \dot{r} = -\dot{r}^2 + S r \ddot{r} \qquad S \dot{r} \ddot{r} = S \dot{r} f(r)$$

$$\frac{1}{2} S \dot{r}^2 = \int$$

$$\ddot{r} = \mu \frac{\rho}{r_0^2}$$

$$S \dot{r} \ddot{r} = \frac{\mu}{r_0^2} S \dot{r} \rho$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 = \mu \int \frac{1}{r_0^3} S \dot{r} r \, dt \qquad \frac{\partial}{\partial t} r^2 = r\dot{r} + \dot{r} r = 2 S \dot{r} r$$

$$= \frac{\mu}{2} \left[\frac{r^2}{r_0^3} - \int \frac{3 r^2 \dot{r}_0 dt}{r_0^4} \right]$$

$$= \frac{\mu}{2} \left[\frac{1}{r_0} - 3 \int \frac{\dot{r}_0}{r_0^2} dt \right] = \frac{\mu}{2} \left[\frac{1}{r_0} \right] + c$$

$$\dot{r}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0} + c}$$

$$\frac{d U \rho}{dt} = U\rho \, V \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{U\rho \, V \dot{\rho} \rho}{T \rho^2} = \frac{U \rho . \gamma}{T \rho^2}$$

$$T[\rho + I(\rho - 2\dot{r})] = c$$

$$\rho_0 =$$

$$(\rho - 2v)_0 = c - \rho_0$$

$$\rho^2 - 2 S \rho i + 4 \dot{r}^2 = c^2 - 2c\rho_0 + \rho^2$$

$$\frac{d U \rho}{dt} = \frac{1}{\mu} \ddot{\rho}$$

$$\rho \gamma = \varepsilon - \mu U \rho$$

Achtung: für T gilt nicht das distributive Gesetz!!

Wenn linearer Operator gegeben durch die Componenten nach 3 $\perp$ Axen

$$s = (c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z)i + (c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z)j + (c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z)k = i\,S c_1 r + j\,S c_2 r + \ldots = \underbrace{[i\,S c_1 + j\,S c_2 + k\,S c_3]}_{c}\, r$$

I. Umkehrung ‖ II. Richtung u. Größe der Hauptaxen

$$s' = (c_{11}x + c_{21}y + c_{31}z)i + (c_{12}x + c_{22}y + c_{32}z)j + (c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z)k = [i\,S c_1' + j\,S c_2' + k\,S c_3']\,r = c' r$$

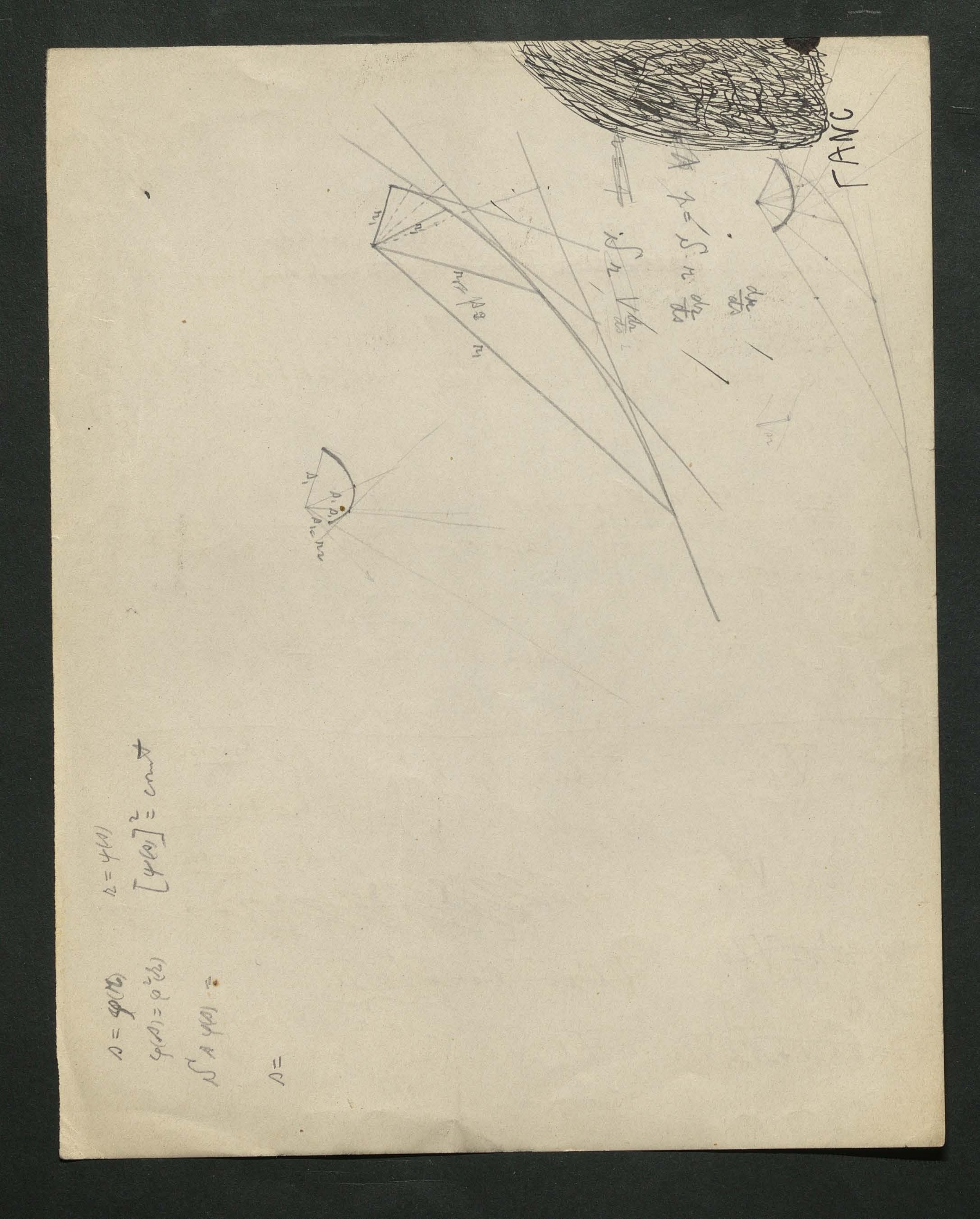
$$s = \left(\frac{c+c'}{2} + \frac{c-c'}{2}\right) r = (a + b)\,r$$

$$a = \left[i\,S\frac{c_1+c_1'}{2} + \ldots\right] \qquad a_{11} = c_{11} \quad a_{12} = \frac{c_{12}+c_{21}}{2} \quad a_{13} = \frac{c_{13}+c_{31}}{2}$$

$$b = 0 \quad \frac{c_{12}-c_{21}}{2} \qquad b_{11} = 0 \quad b_{12} = \frac{c_{12}-c_{21}}{2}$$

$$= V l r \qquad V l r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad l_1 = \frac{c_{23}-c_{32}}{2} \quad l_2 = \frac{c_{31}-c_{13}}{2} \quad l_3 = \frac{c_{12}-c_{21}}{2}$$

$$s = a r + V l r$$



Schlegel Einleitg. in d. Grassmann'sche Ausdehnungslehre Ulm 1884 (0.40)

Sauvan Notions sur la théorie des quat. Paris 1889 (0.60)

Odstrcil Kurze Anleitung zum Rechnen m. d. (Hamilt.) Quaternionen Halle 1879 (0.75)

Tait Elem. Handb. d. Quat. übers. von Scherff Lpzg 1880

Burali-Forti Introduction à la géométrie différentielle suivant (?) Grassmann. Paris 1897

Graefe J.H. Vorlesungen üb. d. Theorie d. Q. Lpz. 1883 (3 M. 60)

Kraft F. Abriss d. geom. Kalküls nach Grassmann Lpz 1893 (6 M.)

Schlegel V. System d. Raumlehre n. Grassmann. 20 M. Lpz. 1872, 75 (11 M.)

Unverzagt Theorie d. ~~Qu~~ goniometr. u. longimetr. Quaternionen Wiesb. 1876 (10 M.)

Saint Venant CR 1845 Vol 21 pg 620

Cauchy Com R 1853 (8 45, 46, 93)

Quaternionen etc. Literatur:

Hamilton: Lectures on Quaternions 1853 (besonders Vorrede, erzählt die Art wie er dazu gekommen ist) containing a systematic statement of a new mathem. method.

Elements of Quaternions 1866 [übers. von Glan: Elemente der Quaternionen I 1882 II 1884]

Tait: An elementary treatise on quaternions

Kelland & Tait: Introduction to quaternions 1873 London

Allegret Essai sur le calcul des quaternions 1862 Paris (2 fl)

Hoüel Théorie élémentaire des quantités complexes IV: Élém. de la th. des quaternions Paris 1867/77

Laisant Introduction à la méth. des q. 1881 } Paris (2.20)
Applications mécaniques du calcul des q. 1877 } (1.80)

Hankel

K. Hertz Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona 1887

Grassmann Lineale Ausdehnungslehre 1844 Leipzig (Stettin 1895)
Die A. vollst. u. in strenger Form bearbeitet 1862 Berlin
Der Ort der Hamilt. Quat. in d. Ausdehnungslehre Math. Ann. XII 1877 p. 375
Sur les différents genres de multiplication Journal f. XLIX 1855, 123

Molenbroek Theorie der Quaternionen Leiden 1891

Mc Aulay Utility of Quaternions in Physics London 1893
Phil. Trans. 1892 p. 685 PRSE 1890 p. 98
Phil. Mag. 1892 p. 477

Dann dienen die 3 ersten Gleichg nur zur Bestimmung der Druckfunktion p.
Die Continuitätsgleichg ist ohnehin schon erfüllt.
Allerdings haben aber diese Lösungen alle nicht viel praktisch[illegible]
Vor allem schon deshalb weil in einem gestaltlosen Gefäss mit festen
Wänden (welches einen einfach zusammenhängenden Raum einschliesst)
eine Potentialbewegg nicht möglich ist.
Es sind solche Bewegg nur möglich wenn die Wände selbst sich
verschieben, oder aber in ringförmigen etc. Gefäss.

Zu der Bewegg Gl kommt noch oberflächenbedingg $\qquad S a N = 0$

$$a = \text{curl} \int \frac{\text{curl}}{r}\, dv + \nabla A$$

Unterschied zw. Wirbelbewegg und Potentialbewg illustrirt durch electr. Analogie
Wenn nämlich bloss Wirbel (unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, in $\nabla^2 = 0$)
Dann analog $\quad h = \text{curl} \int \frac{c\, dv}{r}$

Vector Potential

Denken wir uns ~~[illegible]~~ Linien gezogen, welche die Richtg der Wirbels zeigen, analog wie
electr. Stromlinien so ist die Verteilg der magn Kraft analog der Verteilg der
~~magn~~ Geschw. zB.

2)

Hier habe ich Begriff der Wirbelfäden erwähnt. ~~Wirbel~~ Wirbelfaden nennt man den röhrenförmig Raum der von Wirbellinien eingeschlossen ist:

Da können wir die Überlegung welche vorigs mal betreffs Circulation etc. gemacht wurde etwas erweitern.

Circulation $= \int \mathfrak{v}\,ds = \int \mathfrak{v}\,$ Normale dF

wenn Randcurve = Schnitt Curve eines Wirbelfadens

$= 2q\,c \qquad = \text{constant}$

Product aus Querschnitt des Wirbelfadens und der Rotationsgeschw. = Wirbelintensität ist constant längs eines Wirbelfadens. (was ja unmittelbar aus div curl = 0 folgt) Sie ist aber auch von der Zeit unabhängig wie wir letztes Mal bewiesen haben.

Analoger Satz in Electr.: Strömungsintensität × Querschnitt = Strommenge über ganzen Leiter constant, ~~was übrigens~~

Wirbellinien können natürlich nicht in Flüssigkeit aufhören denn sonst wäre dort div curl ≥ 0, sondern entweder in Oberfläche oder geschlossen

Erster Art Zweiter Art

Man begnügt sich bis heutzutage mit Untersuchung solcher Erscheinungen wo einzelne Wirbelfäden und Ringe; Aufgaben, wo continuirlich vertheilte Wirbelintensität sind noch kaum gelöst.

Ganz anders Potentialbewegung

entspricht electr. Kraft im electrost. Felde, oder magnet. Kraft im Felde welches

von permanenten Magneten herrührt, oder auch electr. stationärer Strömung, immer überall

wo $\nabla^2 A = 0$; dadurch charakterisirt dass keine geschlossenen Stromlinien

vorkommen sondern alle von Oberfläche zu Oberfläche verlaufen

Wohl zu unterscheiden zwischen Strom und Wirbellinien!

Wirbelbewegung charakterisirt durch geschlossene in sich

zurückkehrende Strömung.

Dabei jedoch eine Beschränkung: in ~~einfach~~ mehrfach zusammenhängenden Räumen

gibt es auch eine Art von geschl. Stromlinien, denen kein curl entspricht.

zB.

Dann hat zwar $\oint \mathfrak{e}\, ds$ einen endlichen Wert

man kann es aber nicht setzen $= \iint \mathrm{Normal\ a}\, dF$

und schliessen dass curl $\gtrless 0$, weil Integral über fest

Körper nicht ausgedehnt werden kann.

Da gibt es also auch eine Potentialbewegung mit geschl. Strömung, aber nur

eine einzige. Doch mit diesen complicirteren Fällen wollen wir uns jetzt nicht

beschäftigen: In einem einfach zusammenhängenden Raum müssen alle

Stromlinien von Oberfläche zu Oberfläche gehen, falls curl = 0.

Wenn nun aber die Oberflächen starre Wände sind, so ist dies nicht

möglich, daher gibt es keine Potentialbew. in einem solchen Gefäss.

Und das bewirkt, dass diese Potentialbewegungen so wenig praktisch anwendbar sind.

4) Die gewöhnlichen Arten von Bewegungen und der Wirbelbewegung, Potentialbewegung sind nur Spezialfälle, welche geradezu eine Ausnahme bilden. Aber viel leichter zu berechnen.

Auf etwas aber aufmerksam machen; daraus, dass bei Pot. Bewg. die Teilchen nicht rotieren, folgt noch nicht, dass die Flüssigkeit als Ganzes nicht rotiert.

Beispiel: Zweidimensionale Bewg; Rotationsbewegung in einem Cylinder

$$a = \omega f(r)\, N$$

$$u = -f(r)\frac{y}{r}\,\omega$$

$$v = f(r)\frac{x}{r}\,\omega$$

Wenn z.B. $f(r) = r$, so rotiert das als starrer Körper

$$\operatorname{curl} a = k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1 + 1 = 2\,\omega$$ was wir schon von früher wissen

Ebenso wenn $f(r) = r^2$ etc.

Dagegen Spezialfall $f(r) = \frac{1}{r}$

$$u = -\frac{y}{r^2}\,\omega \qquad v = \frac{x}{r^2}\,\omega$$

$$\operatorname{curl} a = k\,\omega\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4}\right) = 0$$ Das ist also eine Potentialbewegung.

Dabei dreht sich allerdings die ganze Flüssigkeit herum.

aber jedes Teilchen bleibt sich parallel, so wie Erde um Sonne

Man könnte nun meinen das sei Widerspruch gegen früher erwähnten Satz Dass im geschl. Raum keine Potent. bew; das ist aber nicht so; hier existiert thatsächlich ein curl und zwar unendlich grosser in dem O Punkte, und das zeigt sich darin, dass dies ein sogenannter singulärer Punkt der Differentialgl. ist.

Wird das Vol. ebenst in O umlegt so dreht es sich thatsächlich mit.

Man kann auch so sagen:

∞ Geschw. ist nicht möglich, also diese Lösung überhaupt für einen solchen Raum nicht möglich; genügt nur für Raum zwischen concentrischen Hohlcylindern. dann ist das aber eben ein doppelt zusammenhängender Raum, wo wie wir gesagt haben, eine einzige Art von Pot. Beweg. möglich ist.

Dieses Beispiel habe ich aber ~~nicht~~ nur gewählt ~~[illegible]~~ weil es rechnerisch so einfach ist.

Im Allgem. müssen bei Pot. Bewegg die Wände bewegt sein.

Eine Art von Bewegung wo dies vorkommt ist daher ausgiebig durchgearbeitet worden: Fall wenn fester Körper in Flüssigkeit eingetaucht sich bewegen

Mathematisch sehr interessant aber ziemlich schwierig (Lamb Kugel)

Merkwürdiges überraschendes Resultat, wenn Kugel sich in Wasser bewegt so erleidet sie keinen Widerstand solange die Beweg ~~[illegible]~~ mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt. Auf Rotationskörper welcher sich in der Richtg. der Axe bewegt wird gar keine Eigenkraft ausgeübt, ~~Allerdings nicht nur~~ solange sich nicht die Geschw. derselben ändert, dann aber hat das denselben Effekt als ob die Masse des festen Körpers vermehrt wäre. Wenn also d. Äther eine reibungslose Flüssigkeit wäre, so einziger Effekt auf die darin herumschwimmenden Körper, dass ihre Masse scheinbar vergrößert wäre.

~~Da~~ In ~~Natürlichen~~ Flüssigkeiten ist die Sache natürlich absolut anders, das ~~kommt aber von der inneren~~ Reibung her; dort muss fortwährend Arbeit auf ~~die Bewegg des festen Körpers~~ verwendet werden, welche darauf geht um die Reibung zu

6)
zu überwinden. Hier dgg alles constant kein Energieverbrauch.

Natürlich praktisch Bedeutung haben diese Resultate nicht.

Also Pot. Bgg jeder electrost. Aufgabe etc. äquivalent [illegible]

Strömung in Hyperboloidfläche
Dann müsste aber entweder Oberfläche beweglich sein, oder irgendwie anders die Bwg. erzeugt werden.

Andere Art von Aufgaben: Strahlenbildung; Flüssigk. kommt von ∞ und geht in ∞ aber in dem betrachteten Raum interessirt uns ihr Verhalten

Leider bisher nur in

zwei Dimensionen lösbar (Kirchhoff).

Also Strahlen, welche nicht aus ~~Öffng~~ runden Löchern, sondern aus Spalten

austreten.

In zwei Dimensionen wird nämlich überhaupt die Lösung der Gleichg $\Delta^2 A = 0$

sehr leicht. Da wird sie gleich $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$ und das ist die bekannte

Gleichg welche in der Theorie der complexen Function vorkommt.

Nimmt man irgend eine Function $f(x+iy)$ und spaltet sie in den

reellen und imaginären Theil $= \varphi + i\psi$ so genügt sowohl φ als auch

ψ dieser Gleichg.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sout{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i f'$$

$$= f'$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''$$

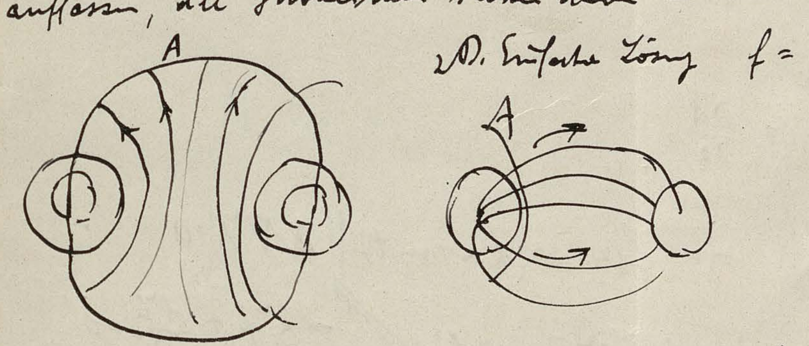
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

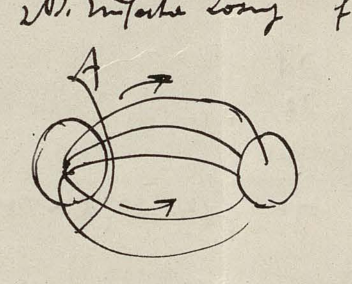
also einzeln $= 0$

Daher ist es so einfach Lösungen dieser Gleichung zu finden, und mögliche Flüssigkeitsbewegungen aufzusuchen.

Man kann dann entweder φ oder ψ als Geschw. Potential auffassen, die Stromlinien stehen dann $\perp$ dazu

z.B. Einfache Lösung $f =$





Wenn man also irgend eine Lösung hat, so kann man immer irgend eine von den Stromlinien sich als feste Wand denken und erhält so Strömung zwischen Wänden. Natürlich ist es schwer, wenn die Wandform von vornherein gegeben ist die zugehörige Lösung zu finden. Man verfährt da eben umgekehrt, Probiren was herauskommt.

Ähnlich auch Strahlen; das ist im ersten Moment auffallend dass hier Strahlen vorkommen, während im Electrost. etc nichts Analoges besteht. Rührt von der Zusatzgleichung I her, die wir jetzt gar nicht berücksichtigt haben und welche den Druck bestimmt; das ist nämlich dass p immer >0 sein muss, sonst reisst die Flüssigkeit auseinander.

Noch eine Art von Aufgaben, und zwar solche welche auf praktisch [illegible] Wellenbewegungen

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \nabla P - \frac{\nabla p}{\rho} \qquad a = \nabla A$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = P - \frac{p}{\rho} = gz - \frac{p}{\rho} + \text{const.}$$

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{z=0}$$

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = g\frac{\partial A}{\partial z}\Big|_{z=0} \qquad A = f(z)\cos(kx + mt) \qquad \nabla^2 A = 0$$

$$-k^2 f + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

$$f = M e^{+kz} + N e^{-kz}$$

Am Boden:

$$z = -h \qquad \frac{dA}{dz} = 0 \qquad \text{daher} \qquad M e^{-kh} = N e^{kh} = \frac{C}{}$$

$$A = C\left[e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\right]\cos(kx + mt)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -m^2 A \qquad \frac{\partial A}{\partial z}\Big|_{z=0} = Ck\left(e^{k(z+h)} - e^{-k(z+h)}\right)\cos$$

woraus folgt: $\frac{m}{k} = \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}}$

und $\zeta = \ldots \sin(kx + mt)$

Für große Wassertiefe $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

kleine $= \sqrt{gh}$

([illegible])

Vector Analysis und Quaternionen mit Rücksicht auf deren Anwendungen in der Physik.

1). Geometrische, physikalische Scalar und Vectorgrößen (Beispiele)

2). Die Operationen die mit letzteren vorgenommen werden hauptsächlich zweierlei Art: Translatorische Parallelverschiebung und Rotation

3). Bezüglich ersterer gilt das assoc., com., distr. Gesetz, wird bei gleichger. Vectoren identisch mit Addition resp. Subtraction, daher auch sonst so genannt. ~~[illegible]~~ Differentialquotienten von Vectoren nach scalaren Unabhängigen. (Beispiele: Polyeder, Gleichungen von Geraden, Curven, Mechanik eines freien Punktes, Kräfteparallelogram, Schwerpunkt, Systeme freier Punkte in der kinetischen Gastheorie, Mittelwerte von Geschwindigkeitsgrößen).

4). Bei Rotation gilt ~~Addition~~ assoc. und distr. Gesetz aber nicht comm., genannt Multiplication, Unterschied derselben gegen gewöhnl. Multipl. Inverse Oper. = Division. Soweit bloß Vector Algebra, die Einführung der Quaternionen bringt eine ebensolche Vereinfachung gegenüber jener hervor, wie Einführung der imaginären Größen in d. Algebra. Unterschiede der Notation bei Hamilton–Tait, Macaulay, Heaviside, Föppl. Multiplication und Division durch die i, j, k. (Beispiele analog den obigen)

5). Transformationsformeln und Interpretation derselben. Das Hamilton'sche $\nabla =$ div + curl (Heaviside). Die Operation ∇^2 und (6∇). Beispiele

6). Systematische übersichtliche Behandlung der Grundlagen der Hydrodynamik ~~[illegible]~~

7). — — — — Maxwell'schen Electricitätslehre

8). Eventuell: Selbstconjugirte Functionen, Elasticitätslehre.

Vorlesungs Verzeichnis:

1). Grundlagen und physikalische Anwendungen der Vector Algebra und Quaternionen-Rechnung.

~~2). Wärmestrahlung und Wärmeleitung~~

2). Strahlende Energie (Licht- und Wärmestrahlung, Spectralanalyse)

3). Kinetische Gastheorie

4). Physikalische Chemie

5). ~~Hydromechanik~~ Elasticitätstheorie

Habilitations Gesuch –
Beilage –
März 1898

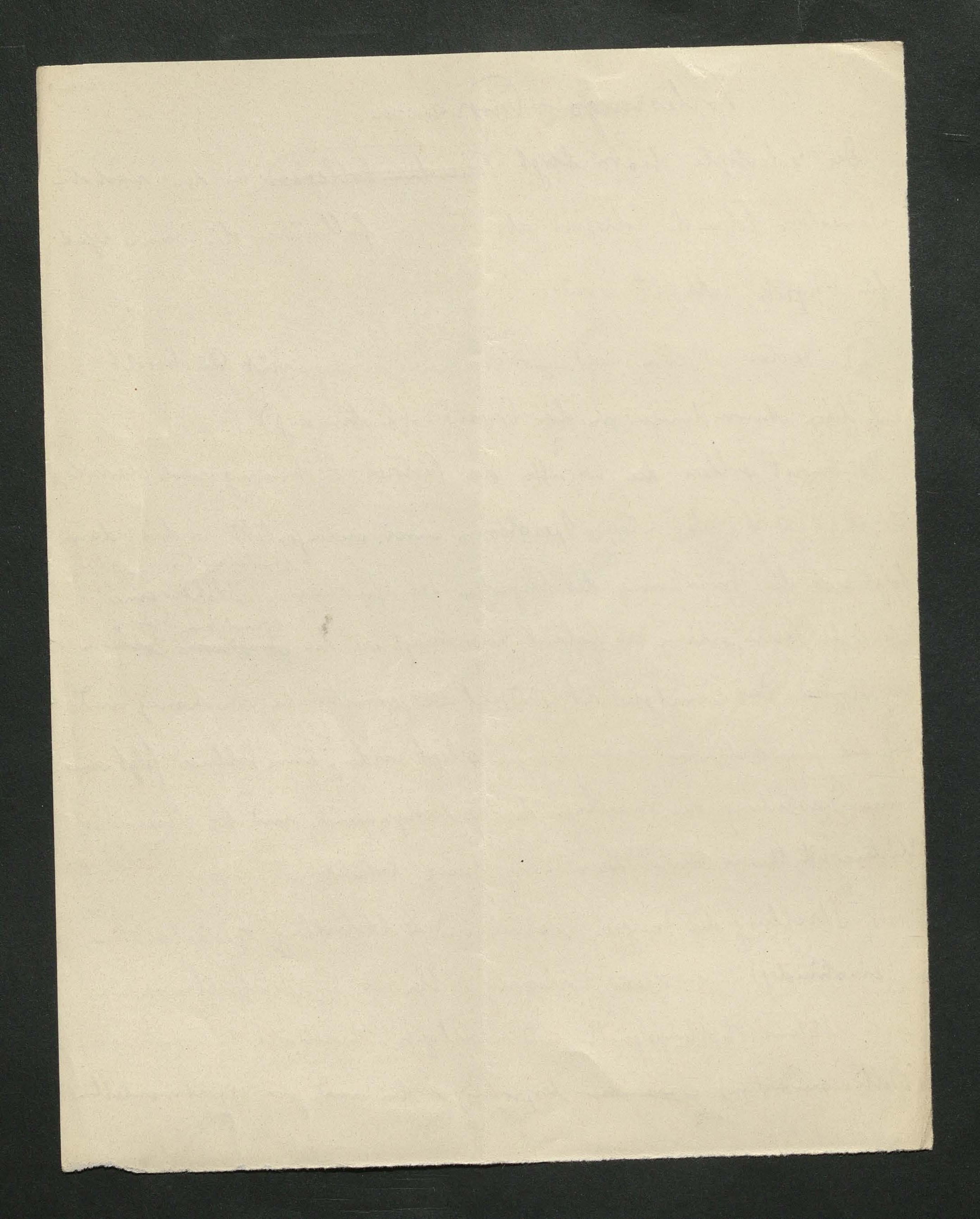
Vorlesungs-Programm.

Der Gefertigte beabsichtigt ~~folgende Collegien~~ in den nächsten Semestern folgende Collegien abzuhalten, falls ihm die venia legendi für Physik ertheilt wird:

I). Vector-Algebra und Quaternionen Rechnung mit Rücksicht auf deren Anwendungen in der Physik. (2 stündig)

Zuerst sollen die Begriffe der Vectoren-Rechnung (nach Heaviside, Föppl) und die elementaren Operationen auseinandergesetzt werden, dann folgt ~~erst~~ die Einführung des Begriffes der Quaternion als eines Symbols, welches eine ähnliche Vereinfachung im Calcül hervorbringt, wie die complexen Grössen ~~imaginären Zahl~~ in der Algebra. Das Hauptgewicht wird dabei ~~auf~~ die geometrische Anschauung und auf die physikalischen Anwendungen gelegt werden. Zum Schluss folgt eine kurze zusammenhängende Darstellung der Grundlage der Hydrodynamik und der Maxwell'schen Electricitätstheorie unter Benützung dieser ~~[illegible]~~ Rechnungsart.

II). Strahlung der Energie. (Wärme- und Lichtstrahlung, Spectralanalyse). (einstündig). In dieser Vorlesung sollen das Kirchhoff-Clausius'sche Gesetz, Stefans Strahlungsgesetz und einschlägige theoretische Untersuchungen (Boltzmann, W. Wien), ~~sowie die~~ besprochen, ~~[illegible]~~ ~~und~~ die experimentellen



Untersuchungen von Langley etc. über Wärmestrahlung, sowie insbesondere die Methode und Ergebnisse der Spectral-Analyse dargelegt werden.

III). ~~Ausgewählte Capitel~~ Auswahl aus der physikalischen Chemie

(Atom- und Molekulargewichte in ihrer Beziehung zu physikalischen Prozessen). (2stündig).

~~In dieser Vorlesung sollen die Grundl~~

Der Gegenstand dieser Vorlesung wird sein: ~~Electrol~~ Dulong-Petit'sches Gesetz, Dampfdruck, osmotischer Druck, Gefrierpunktserniedrigung, Electrolyse.

IV). Kinetische Gastheorie (2stündig)

Diese Vorlesung soll die Studierenden mit den Grundlagen der Theorie in der ~~Boltzmann~~ ~~[illegible]~~ Clausius'schen Behandlungsweise, und mit ~~den~~ ~~Clausius' Berechnungen~~ ~~Untersuchungen~~ ~~gestützt bekannt machen.~~ den Ergebnissen von Maxwell's und Boltzmann's Untersuchungen bekannt mach[en].

